

Le principe du maximum entre le Laplacien et le bilaplacien

Nicola Abatangelo

en collaboration avec Sven Jarohs (Frankfurt) et Alberto Saldaña (Karlsruhe)

Journées JEF 2018, IECL - Nancy

22 mars 2018



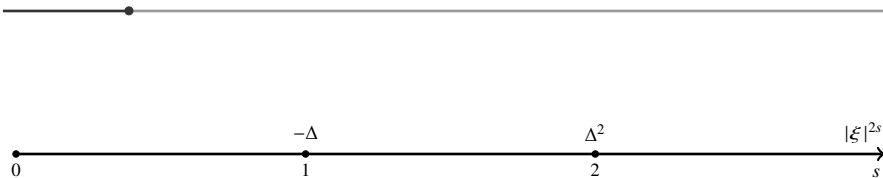
$$-\Delta$$

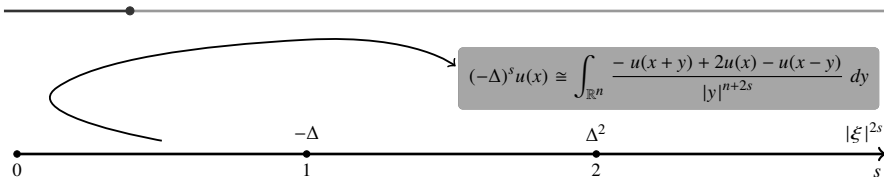
$$-\Delta$$

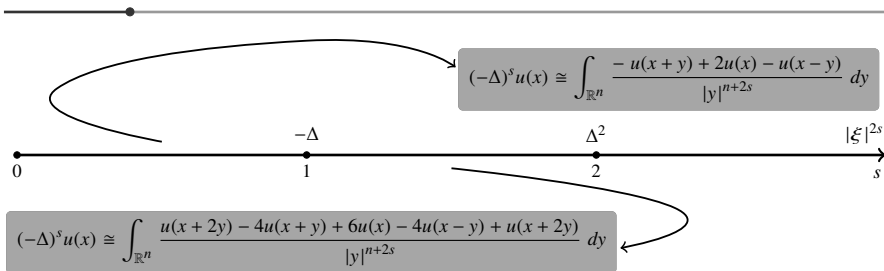
$$1$$

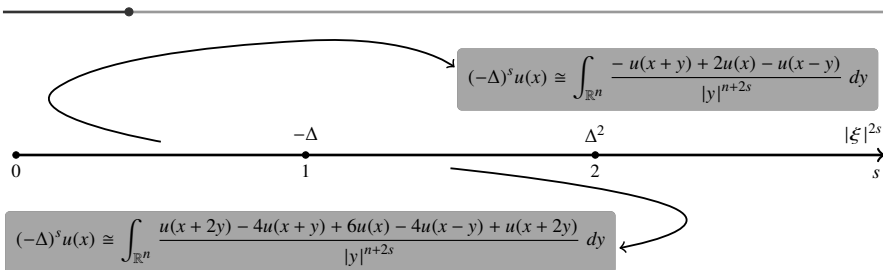
$$\Delta^2$$

$$2$$







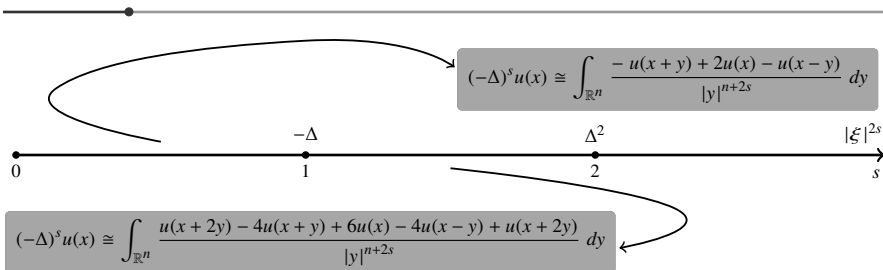


Remarque :

La deuxième équation est valable pour tout $s \in (0, 2)$: si $s \in (0, 1)$ on a

$$(4 - 4^s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-u(x+y) + 2u(x) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+2y) - 4u(x+y) + 6u(x) - 4u(x-y) + u(x-2y)}{|y|^{n+2s}} dy$$

A, Jarohs, and Saldaña, *Positive powers of the Laplacian : from hypersingular kernels to boundary value problems*, 2018.



Remarque :

La deuxième équation est valable pour tout $s \in (0, 2)$: si $s \in (0, 1)$ on a

$$(4 - 4^s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-u(x+y) + 2u(x) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+2y) - 4u(x+y) + 6u(x) - 4u(x-y) + u(x-2y)}{|y|^{n+2s}} dy$$

alors que lorsque $s = 1$

$$-\Delta u(x) = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{4\pi^{n/2} \ln 2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+2y) - 4u(x+y) + 6u(x) - 4u(x-y) + u(x-2y)}{|y|^{n+2}} dy$$

A, Jarohs, and Saldaña, *Positive powers of the Laplacian : from hypersingular kernels to boundary value problems*, 2018.

Le bilaplacien

modélise le déplacement d'une plaque élastique mince sous l'action d'une force (ponts)

apparaît en géométrie (opérateur de Paneitz-Branson et équation de la Q -courbure, énergie de Willmore,...)

Le bilaplacien

modélise le déplacement d'une plaque élastique mince sous l'action d'une force (ponts)

apparaît en géométrie (opérateur de Paneitz-Branson et équation de la Q -courbure, énergie de Willmore,...)

Le Laplacien fractionnaire

est le générateur infinitésimale d'un processus α -stable (vol de Lévy) $\rightarrow$ trajectoires discontinues

modélise phénomènes avec interactions à longue portée tels que : l'évolution des épicentres des séismes, les prix des produits en finance, la recherche de nourriture chez certains animaux (cerfs, bourdons, albatros, requins,...) ; il est utilisé en mécanique quantique fractionnaire

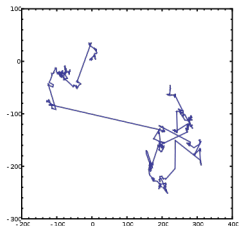


FIGURE 1 – Trajectoire d'un processus 1-stable discret

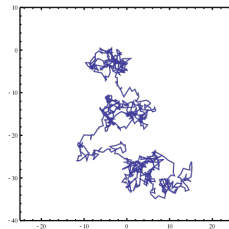


FIGURE 2 – Trajectoire d'une marche aléatoire

$$(-\Delta)^2 = (-\Delta) \circ (-\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_2(u, v) = \int_{\Omega} (-\Delta)u \, (-\Delta)v \quad \begin{cases} (-\Delta)^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Contre-exemples :

Exemple :

$$(-\Delta)^2 = (-\Delta) \circ (-\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_2(u, v) = \int_{\Omega} (-\Delta)u \, (-\Delta)v \quad \begin{cases} (-\Delta)^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Contre-exemples :

– Ellipse mince $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 25y^2 - 1 < 0\}$

Shapiro and Tegmark, 1994. • Garabedian, 1951.

Exemple :

$$(-\Delta)^2 = (-\Delta) \circ (-\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_2(u, v) = \int_{\Omega} (-\Delta)u (-\Delta)v \quad \begin{cases} (-\Delta)^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Contre-exemples :

– Ellipse mince $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 25y^2 - 1 < 0\}$

Shapiro and Tegmark, 1994. • Garabedian, 1951.

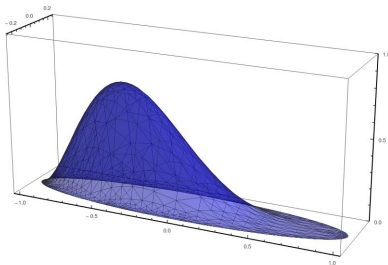


FIGURE 3 – Image de A. Saldaña[©].

$$(-\Delta)^2 = (-\Delta) \circ (-\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_2(u, v) = \int_{\Omega} (-\Delta)u \, (-\Delta)v \quad \begin{cases} (-\Delta)^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Contre-exemples :

– Ellipse mince $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 25y^2 - 1 < 0\}$

Shapiro and Tegmark, 1994. • Garabedian, 1951.

– Domaines avec angles

Coffman and Duffin, 1980.

Exemple :

$$(-\Delta)^2 = (-\Delta) \circ (-\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_2(u, v) = \int_{\Omega} (-\Delta)u \, (-\Delta)v \quad \begin{cases} (-\Delta)^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Contre-exemples :

– Ellipse mince $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 25y^2 - 1 < 0\}$

Shapiro and Tegmark, 1994. • Garabedian, 1951.

– Domaines avec angles (toute dimension, toute puissance paire)

Coffman and Duffin, 1980. • Kozlov, Kondrat'ev, and Maz'ya, 1990.

Exemple :

$$(-\Delta)^2 = (-\Delta) \circ (-\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_2(u, v) = \int_{\Omega} (-\Delta)u \, (-\Delta)v \quad \begin{cases} (-\Delta)^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Contre-exemples :

– Ellipse mince $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 25y^2 - 1 < 0\}$

Shapiro and Tegmark, 1994. • Garabedian, 1951.

– Domaines avec angles (toute dimension, toute puissance paire)

Coffman and Duffin, 1980. • Kozlov, Kondrat'ev, and Maz'ya, 1990.

– Boule percée

Nakai and Sario, 1977. • Hadamard, 1908.

Exemple :

$$(-\Delta)^2 = (-\Delta) \circ (-\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_2(u, v) = \int_{\Omega} (-\Delta)u (-\Delta)v \quad \begin{cases} (-\Delta)^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Contre-exemples :

– Ellipse mince $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 25y^2 - 1 < 0\}$ (also for the 3-laplacian)

Shapiro and Tegmark, 1994. • Garabedian, 1951. • [Sweers, 2016](#).

– Domaines avec angles (toute dimension, toute puissance paire)

Coffman and Duffin, 1980. • Kozlov, Kondrat'ev, and Maz'ya, 1990.

– Boule percée

Nakai and Sario, 1977. • Hadamard, 1908.

Exemple :

$$(-\Delta)^2 = (-\Delta) \circ (-\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_2(u, v) = \int_{\Omega} (-\Delta)u \, (-\Delta)v \quad \begin{cases} (-\Delta)^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Contre-exemples :

- Ellipse mince $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 25y^2 - 1 < 0\}$ (also for the 3-laplacian)

Shapiro and Tegmark, 1994. • Garabedian, 1951. • [Sweers, 2016](#).

- Domaines avec angles (toute dimension, toute puissance paire)

Coffman and Duffin, 1980. • Kozlov, Kondrat'ev, and Maz'ya, 1990.

- Boule percée

Nakai and Sario, 1977. • Hadamard, 1908.

Exemple :

- Boules (toute dimension, toute puissance)

Lauricella, 1896. • Boggio, 1905.

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$ Lauricella, 1896.

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$ Lauricella, 1896.

$s \in \mathbb{N}$ Boggio, 1905.

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x - y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)_+ + (1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau + 1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$ Lauricella, 1896.

$s \in \mathbb{N}$ Boggio, 1905.

$s \in (0, 1)$ Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$	Lauricella, 1896.
$s \in \mathbb{N}$	Boggio, 1905.
$s \in (0, 1)$	Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.
$s > 1$	A., Jarošs, and Saldaña, 2016.

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$	Lauricella, 1896.
$s \in \mathbb{N}$	Boggio, 1905.
$s \in (0, 1)$	Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.
$s > 1$	A., Jarošs, and Saldaña, 2016.

Idée de la preuve. Induction sur s :

$$-\Delta_x G_s(x, y) = G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y).$$

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)_+ + (1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$	Lauricella, 1896.
$s \in \mathbb{N}$	Boggio, 1905.
$s \in (0, 1)$	Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.
$s > 1$	A., Jarošs, and Saldaña, 2016.

Idée de la preuve. Induction sur s :

$$-\Delta_x G_s(x, y) = G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y).$$

$$(-\Delta)_x^s G_s(x, y) =$$

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$	Lauricella, 1896.
$s \in \mathbb{N}$	Boggio, 1905.
$s \in (0, 1)$	Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.
$s > 1$	A., Jaroš, and Saldaña, 2016.

Idée de la preuve. Induction sur s :

$$-\Delta_x G_s(x, y) = G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y).$$

$$(-\Delta)_x^s G_s(x, y) = (-\Delta)_x^{s-1} (-\Delta)_x$$

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)+(1-|y|^2)+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$	Lauricella, 1896.
$s \in \mathbb{N}$	Boggio, 1905.
$s \in (0, 1)$	Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.
$s > 1$	A., Jarošs, and Saldaña, 2016.

Idée de la preuve. Induction sur s :

$$-\Delta_x G_s(x, y) = G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y).$$

$$(-\Delta)_x^s G_s(x, y) = (-\Delta)_x^{s-1} (-\Delta)_x G_s(x, y) =$$

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)_+ + (1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$	Lauricella, 1896.
$s \in \mathbb{N}$	Boggio, 1905.
$s \in (0, 1)$	Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.
$s > 1$	A., Jarošs, and Saldaña, 2016.

Idée de la preuve. Induction sur s :

$$-\Delta_x G_s(x, y) = G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y).$$

$$\begin{aligned} (-\Delta)_x^s G_s(x, y) &= (-\Delta)_x^{s-1} (-\Delta)_x G_s(x, y) = \\ &= (-\Delta)_x^{s-1} (G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y)) \end{aligned}$$

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)_+ + (1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$	Lauricella, 1896.
$s \in \mathbb{N}$	Boggio, 1905.
$s \in (0, 1)$	Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.
$s > 1$	A., Jarohs, and Saldaña, 2016.

Idée de la preuve. Induction sur s :

$$-\Delta_x G_s(x, y) = G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y).$$

$$\begin{aligned} (-\Delta)_x^s G_s(x, y) &= (-\Delta)_x^{s-1} (-\Delta)_x G_s(x, y) = \\ &= (-\Delta)_x^{s-1} (G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y)) = \delta_x(dy) - \underbrace{(-\Delta)_x^{s-1} H_{s-1}(x, y)}_{=0} = \delta_x(dy) \end{aligned}$$

$$G_s(x, y) = \frac{k_{n,s}}{|x-y|^{n-2s}} \int_0^{\frac{(1-|x|^2)_+ + (1-|y|^2)_+}{|x-y|^2}} \frac{\tau^{s-1}}{(\tau+1)^{n/2}} d\tau, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$s = 2$	Lauricella, 1896.
$s \in \mathbb{N}$	Boggio, 1905.
$s \in (0, 1)$	Riesz, 1938. • Blumenthal, Gettoor, and Ray, 1961.
$s > 1$	A., Jarošs, and Saldaña, 2016.

Idée de la preuve. Induction sur s :

$$-\Delta_x G_s(x, y) = G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y).$$

$$\begin{aligned} (-\Delta)_x^s G_s(x, y) &= (-\Delta)_x^{s-1} (-\Delta)_x G_s(x, y) = \\ &= (-\Delta)_x^{s-1} (G_{s-1}(x, y) - H_{s-1}(x, y)) = \delta_x(dy) - \underbrace{(-\Delta)_x^{s-1} H_{s-1}(x, y)}_{=0} = \delta_x(dy) \end{aligned}$$

$$(-\Delta)^s = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{2s}\mathcal{F}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_s(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \mathcal{F}u \mathcal{F}v \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

$$(-\Delta)^s = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{2s}\mathcal{F}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_s(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \mathcal{F}u \mathcal{F}v \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

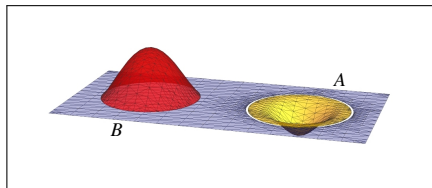


FIGURE 3 – Le graphe du contre-exemple.

En rouge, la solution $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0^s(B)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{u} = M \quad \text{dans } B.$$

En rouge, la solution $\mathbf{p} \in \mathcal{H}_0^s(A)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{p} = -1 \quad \text{dans } A.$$

$$(-\Delta)^s = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{2s}\mathcal{F}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_s(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \mathcal{F}u \mathcal{F}v \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

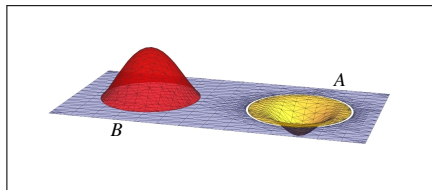


FIGURE 3 – Le graphe du contre-exemple.

En rouge, la solution $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0^s(B)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{u} = M \quad \text{dans } B.$$

En rouge, la solution $\mathbf{p} \in \mathcal{H}_0^s(A)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{p} = -1 \quad \text{dans } A.$$

Pour toute $v \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$, $v \geq 0$, on a

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{u} + \mathbf{p}, v) = \begin{cases} \mathcal{E}_s(\mathbf{u}, v_A) \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{p}, v_A) \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{u}, v_B) \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{p}, v_B) \end{cases}$$

A, Jarohs, and Saldaña, *On the loss of maximum principle for higher-order fractional Laplacians*, 2018.

$$(-\Delta)^s = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{2s}\mathcal{F}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_s(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \mathcal{F}u \mathcal{F}v \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

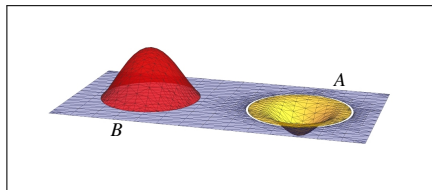


FIGURE 3 – Le graphe du contre-exemple.

En rouge, la solution $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0^s(B)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{u} = M \quad \text{dans } B.$$

En rouge, la solution $\mathbf{p} \in \mathcal{H}_0^s(A)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{p} = -1 \quad \text{dans } A.$$

Pour toute $v \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$, $v \geq 0$, on a

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{u} + \mathbf{p}, v) = \begin{cases} \mathcal{E}_s(\mathbf{u}, v_A) & > 0 \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{p}, v_A) & < 0 \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{u}, v_B) & > 0 \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{p}, v_B) & < 0 \end{cases}$$

A, Jarohs, and Saldaña, *On the loss of maximum principle for higher-order fractional Laplacians*, 2018.

$$(-\Delta)^s = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{2s}\mathcal{F}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_s(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \mathcal{F}u \mathcal{F}v \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

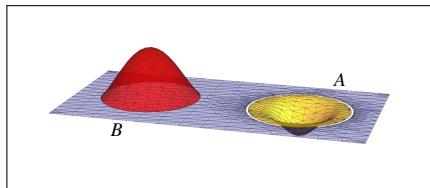


FIGURE 3 – Le graphe du contre-exemple.

En rouge, la solution $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0^s(B)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{u} = M \quad \text{dans } B.$$

En rouge, la solution $\mathbf{p} \in \mathcal{H}_0^s(A)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{p} = -1 \quad \text{dans } A.$$

Pour toute $v \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$, $v \geq 0$, on a

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{u} + \mathbf{p}, v) = \begin{cases} \mathcal{E}_s(\mathbf{u}, v_A) > 0 \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{p}, v_A) < 0 \end{cases} > 0$$

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{u} + \mathbf{p}, v) = \begin{cases} + \mathcal{E}_s(\mathbf{u}, v_B) > 0 \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{p}, v_B) < 0 \end{cases} > 0$$

A, Jarohs, and Saldaña, *On the loss of maximum principle for higher-order fractional Laplacians*, 2018.

$$(-\Delta)^s = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{2s}\mathcal{F}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_s(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \mathcal{F}u \mathcal{F}v \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^s(\Omega) \end{cases}$$

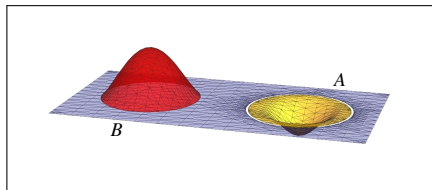


FIGURE 3 – Le graphe du contre-exemple.

En rouge, la solution $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0^s(B)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{u} = M \quad \text{dans } B.$$

En rouge, la solution $\mathbf{p} \in \mathcal{H}_0^s(A)$ de

$$(-\Delta)^s \mathbf{p} = -1 \quad \text{dans } A.$$

Pour toute $v \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$, $v \geq 0$, on a

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{u} + \mathbf{p}, v) = \begin{cases} \mathcal{E}_s(\mathbf{u}, v_A) & < 0 \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{p}, v_A) & < 0 \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{u}, v_B) & > 0 \\ + \mathcal{E}_s(\mathbf{p}, v_B) & > 0 \end{cases} \quad (s \in (0, 1))$$

A, Jarohs, and Saldaña, *On the loss of maximum principle for higher-order fractional Laplacians*, 2018.

- les deux boules peuvent être reliées par un petit tube

- ▶ les deux boules peuvent être reliées par un petit tube
- ▶ A peut être n'importe quel ouvert tel que $A \cap B = \emptyset$
- ▶ B peut être n'importe quel ouvert qui possède un principe du maximum

- ▶ les deux boules peuvent être reliées par un petit tube
- ▶ A peut être n'importe quel ouvert tel que $A \cap B = \emptyset$
- ▶ B peut être n'importe quel ouvert qui possède un principe du maximum
- ▶ le contre-exemple est valable pour tout $s \in (2k - 1, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$

- ▶ les deux boules peuvent être reliées par un petit tube
- ▶ A peut être n'importe quel ouvert tel que $A \cap B = \emptyset$
- ▶ B peut être n'importe quel ouvert qui possède un principe du maximum
- ▶ le contre-exemple est valable pour tout $s \in (2k - 1, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$
- ▶ le contre-exemple ne peut *pas* être généralisé pour $s \in (2k, 2k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$: dans ce cas, la fonction de Green de la double boule est *positive* ; en effet on sait montrer que

$$G_s^2(x, y) > 0 \text{ for } x, y \in B, \quad G_s^2(x, y) \begin{cases} > 0 & \text{for } x \in B, y \in A, s \in (2k - 1, 2k) \\ < 0 & \text{for } x \in B, y \in A, s \in (2k, 2k + 1) \\ = 0 & \text{for } x \in B, y \in A, s \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A, Jarohs, and Saldaña, *Integral representation of solutions to higher-order fractional Dirichlet problems on balls*, 2018.

