

# États d'équilibre d'un système de diffusion croisée, preuves assistées par ordinateur

**Maxime Breden**  
**Technical University of Munich**

*Collaboration avec Roberto Castelli, Vrije Universiteit Amsterdam*

Journées Jeunes EDPistes, Nancy, 22 mars 2018

# Le système SKT [Shigesada, Kawasaki, Teramoto '79]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

- Utilisé pour étudier la dynamique de deux populations en compétition.

# Le système SKT [Shigesada, Kawasaki, Teramoto '79]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

- Utilisé pour étudier la dynamique de deux populations en compétition.
- Les termes de *diffusion croisée*  $\Delta(uv)$  modélisent le fait que les individus réagissent à la présence d'individus de l'autre espèce, en diffusant davantage.

# Le système SKT [Shigesada, Kawasaki, Teramoto '79]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

- Utilisé pour étudier la dynamique de deux populations en compétition.
- Les termes de *diffusion croisée*  $\Delta(uv)$  modélisent le fait que les individus réagissent à la présence d'individus de l'autre espèce, en diffusant davantage.
- Ces termes ont été introduits pour obtenir des états stationnaires non homogènes.

# Comportement en temps grand

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

# Comportement en temps grand

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

- L'existence (locale en temps) de solutions découle de la théorie des équations paraboliques quasilineaires [Amann '90].

# Comportement en temps grand

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

- L'existence (locale en temps) de solutions découle de la théorie des équations paraboliques quasilineaires [Amann '90].
- La question de l'existence de solutions classiques globales en temps est toujours largement ouverte. Des progrès récents ont été obtenus à l'aide de méthodes d'entropies [Chen, Jüngel '14; Desvillettes, Lepoutre, Moussa, Trescases '15].

# Comportement en temps grand

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

- L'existence (locale en temps) de solutions découle de la théorie des équations paraboliques quasilineaires [Amann '90].
- La question de l'existence de solutions classiques globales en temps est toujours largement ouverte. Des progrès récents ont été obtenus à l'aide de méthodes d'entropies [Chen, Jüngel '14; Desvillettes, Lepoutre, Moussa, Trescases '15].
- On peut commencer par étudier les états stationnaires

## États d'équilibre du système SKT triangulaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

## États d'équilibre du système SKT triangulaire

$$\begin{cases} 0 = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \Omega, \\ 0 = \Delta((d_2 + d_{21}u)v) + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

# États d'équilibre du système SKT triangulaire

$$\begin{cases} 0 = \Delta((d_1 + d_{12}v)u) + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } \Omega, \\ 0 = d_2\Delta v + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- On suppose qu'un des coefficients de diffusion croisée est nul.

# États d'équilibre du système SKT triangulaire

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- On suppose qu'un des coefficients de diffusion croisée est nul.
- On se place en dimension 1.

# États d'équilibre du système SKT triangulaire

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- On suppose qu'un des coefficients de diffusion croisée est nul.
- On se place en dimension 1.
- On fixe tous les paramètres :  $\Omega = (0, 1)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $d_{12} = 3$ ,  $d_{21} = 0$ ,

# États d'équilibre du système SKT triangulaire

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- On suppose qu'un des coefficients de diffusion croisée est nul.
- On se place en dimension 1.
- On fixe tous les paramètres :  $\Omega = (0, 1)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $d_{12} = 3$ ,  $d_{21} = 0$ , sauf  $d_1 = d_2 = d$  qu'on fait varier.

## États d'équilibre du système SKT triangulaire

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- On suppose qu'un des coefficients de diffusion croisée est nul.
- On se place en dimension 1.
- On fixe tous les paramètres :  $\Omega = (0, 1)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $d_{12} = 3$ ,  $d_{21} = 0$ , sauf  $d_1 = d_2 = d$  qu'on fait varier.
- Pour ces valeurs de paramètres, on a un état d'équilibre homogène

$$(u_{eq}, v_{eq}) = \left( \frac{r_1 a_2 - r_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2}, \frac{r_2 a_1 - r_1 b_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2} \right).$$

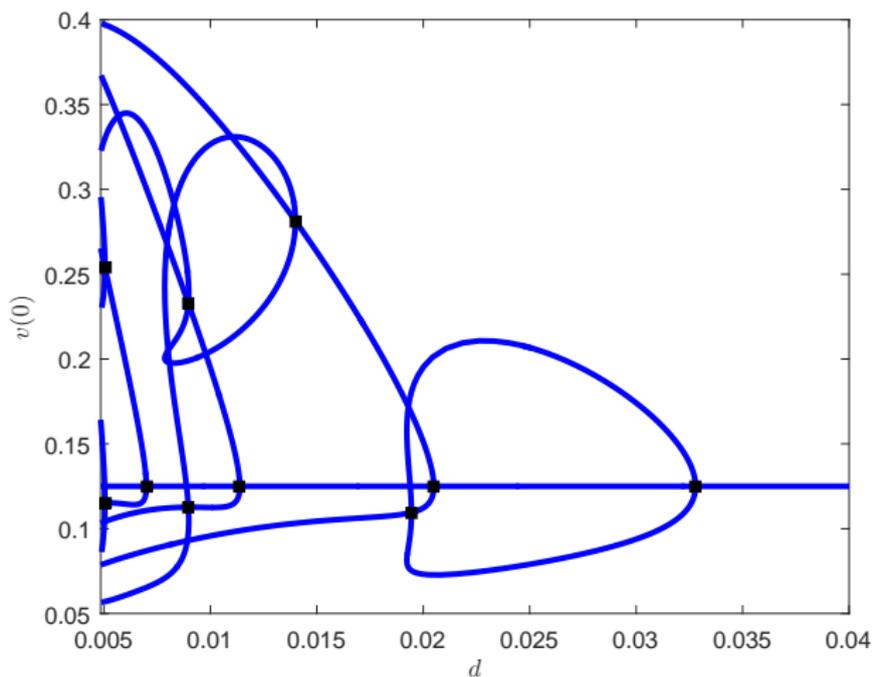
# États d'équilibre du système SKT triangulaire

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

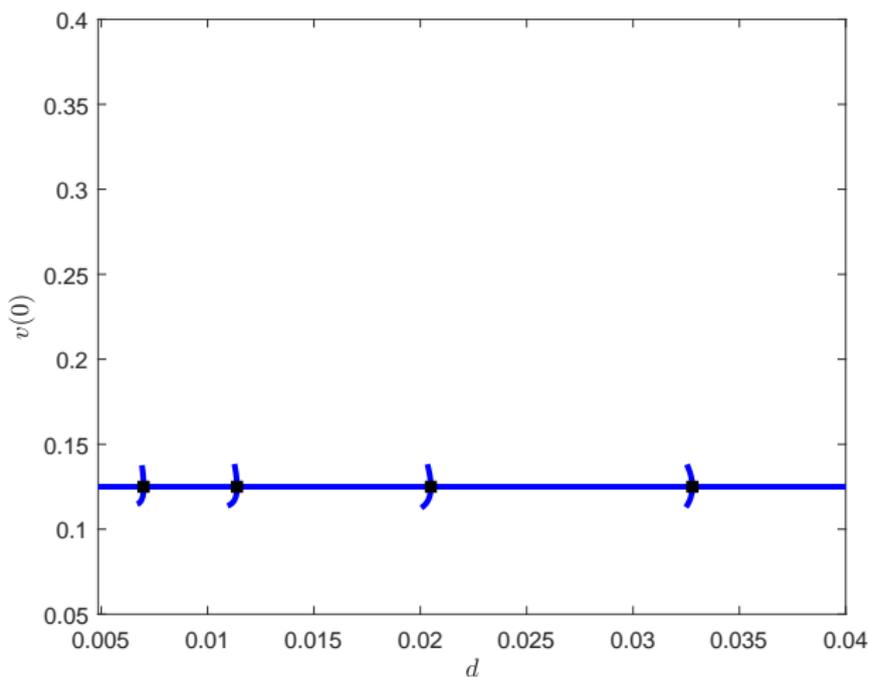
- On suppose qu'un des coefficients de diffusion croisée est nul.
- On se place en dimension 1.
- On fixe tous les paramètres :  $\Omega = (0, 1)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $d_{12} = 3$ ,  $d_{21} = 0$ , sauf  $d_1 = d_2 = d$  qu'on fait varier.
- Pour ces valeurs de paramètres, on a un état d'équilibre homogène

$$(u_{eq}, v_{eq}) = \left( \frac{r_1 a_2 - r_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2}, \frac{r_2 a_1 - r_1 b_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2} \right).$$

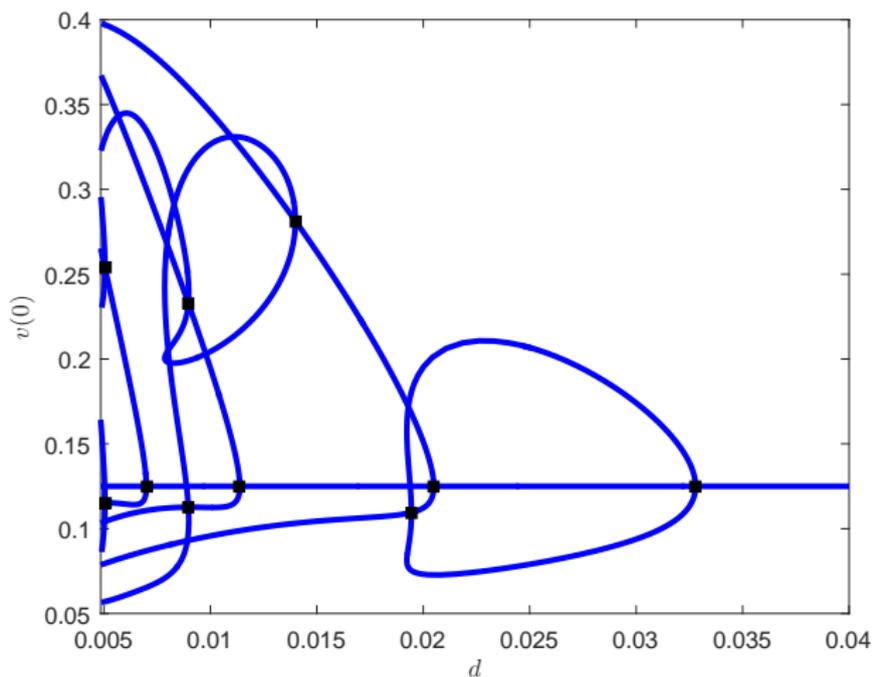
- On peut commencer par étudier numériquement l'existence d'autres états d'équilibre.



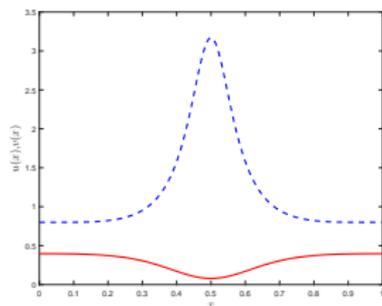
**Figure:** Un diagramme de bifurcation d'états stationnaires pour le système SKT, dans le cas dit de *forte compétition intra-espèces*, obtenu pour la première fois par [Iida, Mimura, Ninomiya '06].  $\Omega = (0, 1)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $d_{12} = 3$ ,  $d_{21} = 0$  et  $d_1 = d_2 = d$  est le paramètre de bifurcation.



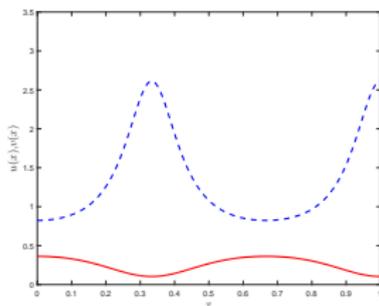
**Figure:** Un diagramme de bifurcation d'états stationnaires pour le système SKT, dans le cas dit de *forte compétition intra-espèces*, obtenu pour la première fois par [Iida, Mimura, Ninomiya '06].  $\Omega = (0, 1)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $d_{12} = 3$ ,  $d_{21} = 0$  et  $d_1 = d_2 = d$  est le paramètre de bifurcation.



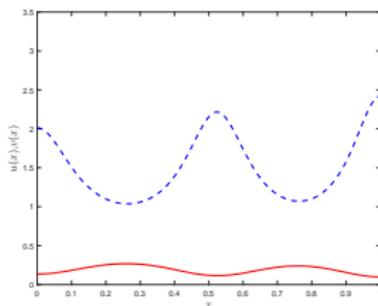
**Figure:** Un diagramme de bifurcation d'états stationnaires pour le système SKT, dans le cas dit de *forte compétition intra-espèces*, obtenu pour la première fois par [Iida, Mimura, Ninomiya '06].  $\Omega = (0, 1)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $d_{12} = 3$ ,  $d_{21} = 0$  et  $d_1 = d_2 = d$  est le paramètre de bifurcation.



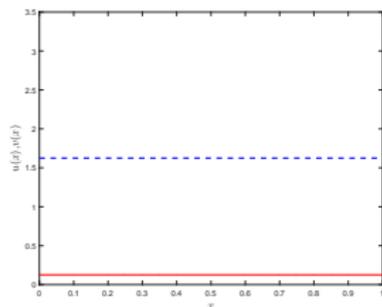
(a)  $v(0) = 0.3973$



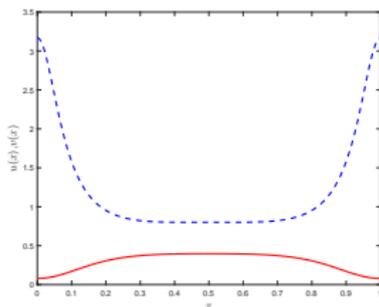
(b)  $v(0) = 0.3632$



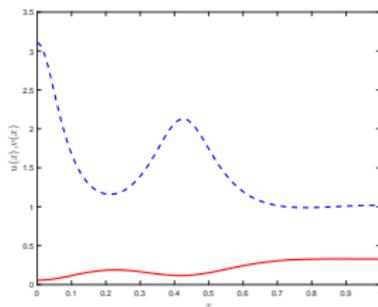
(c)  $v(0) = 0.1357$



(d)  $v(0) = 0.1250$



(e)  $v(0) = 0.0793$



(f)  $v(0) = 0.0569$

# COMMENT ÉTUDIER RIGOREUSEMENT CES SOLUTIONS NON HOMOGENÈS ?

# Méthode de validation a posteriori

On considère un problème de la forme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , où  $F$  est définie sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , pour lequel on dispose d'un zéro approché  $\bar{\mathbf{X}}$ .

# Méthode de validation a posteriori

On considère un problème de la forme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , où  $F$  est définie sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , pour lequel on dispose d'un zéro approché  $\bar{\mathbf{X}}$ .

- ▶ OBJECTIF : démontrer l'existence d'un zéro de  $F$  dans un voisinage explicite de  $\bar{\mathbf{X}}$

# Méthode de validation a posteriori

On considère un problème de la forme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , où  $F$  est définie sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , pour lequel on dispose d'un zéro approché  $\bar{\mathbf{X}}$ .

- ▶ OBJECTIF : démontrer l'existence d'un zéro de  $F$  dans un voisinage explicite de  $\bar{\mathbf{X}}$
- ▶ IDÉE PRINCIPALE : utiliser un argument de point fixe

# Méthode de validation a posteriori

On considère un problème de la forme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , où  $F$  est définie sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , pour lequel on dispose d'un zéro approché  $\bar{\mathbf{X}}$ .

► OBJECTIF : démontrer l'existence d'un zéro de  $F$  dans un voisinage explicite de  $\bar{\mathbf{X}}$

► IDÉE PRINCIPALE : utiliser un argument de point fixe

$$T(X) = X - DF(X)^{-1}F(X)$$

# Méthode de validation a posteriori

On considère un problème de la forme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , où  $F$  est définie sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , pour lequel on dispose d'un zéro approché  $\bar{\mathbf{X}}$ .

- ▶ OBJECTIF : démontrer l'existence d'un zéro de  $F$  dans un voisinage explicite de  $\bar{\mathbf{X}}$
- ▶ IDÉE PRINCIPALE : utiliser un argument de point fixe

$$T(X) = X - DF(\bar{X})^{-1}F(X)$$

# Méthode de validation a posteriori

On considère un problème de la forme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , où  $F$  est définie sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , pour lequel on dispose d'un zéro approché  $\bar{\mathbf{X}}$ .

- ▶ OBJECTIF : démontrer l'existence d'un zéro de  $F$  dans un voisinage explicite de  $\bar{\mathbf{X}}$
- ▶ IDÉE PRINCIPALE : utiliser un argument de point fixe

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - A\mathbf{F}(\mathbf{X})$$

où  $A$  est une application linéaire injective,  $\mathbf{A} \simeq D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}})^{-1}$ .

# Méthode de validation a posteriori

On considère un problème de la forme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , où  $F$  est définie sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , pour lequel on dispose d'un zéro approché  $\bar{\mathbf{X}}$ .

- ▶ OBJECTIF : démontrer l'existence d'un zéro de  $F$  dans un voisinage explicite de  $\bar{\mathbf{X}}$
- ▶ IDÉE PRINCIPALE : utiliser un argument de point fixe

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{X})$$

où  $A$  est une application linéaire injective,  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{DF}(\bar{\mathbf{X}})^{-1}$ .

# Méthode de validation a posteriori

On considère un problème de la forme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ , où  $F$  est définie sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , pour lequel on dispose d'un zéro approché  $\bar{\mathbf{X}}$ .

- ▶ OBJECTIF : démontrer l'existence d'un zéro de  $F$  dans un voisinage explicite de  $\bar{\mathbf{X}}$
- ▶ IDÉE PRINCIPALE : utiliser un argument de point fixe

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{X})$$

où  $A$  est une application linéaire injective,  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{DF}(\bar{\mathbf{X}})^{-1}$ .

- ▶ Il "reste" à démontrer qu'on peut appliquer un théorème de point fixe à  $T$  dans un voisinage de  $\bar{\mathbf{X}}$

# Un théorème de Newton-Kantorovich

Soit  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  deux espaces de Banach,  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  une fonction  $\mathcal{C}^2$ ,  $\bar{X} \in \mathcal{X}$  et  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$  injectif. On suppose qu'il existe des constantes  $Y, Z_1$  et une fonction  $Z_2$  telles que

$$\begin{aligned}\|AF(\bar{X})\|_{\mathcal{X}} &\leq Y \\ \|I - ADF(\bar{X})\|_{\mathcal{X}} &\leq Z_1 \\ \|AD^2F(X)\|_{\mathcal{X}} &\leq Z_2(r) \quad \forall X \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\bar{X}, r),\end{aligned}$$

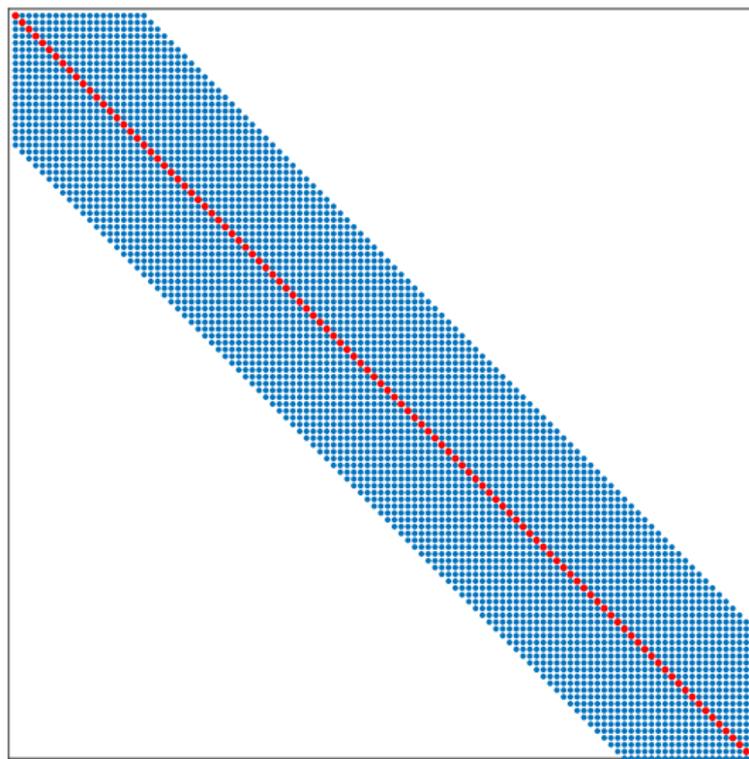
où  $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\bar{X}, r)$  est la boule fermée de centre  $\bar{X}$  et de rayon  $r$  dans  $\mathcal{X}$ .

S'il existe  $r > 0$  tel que

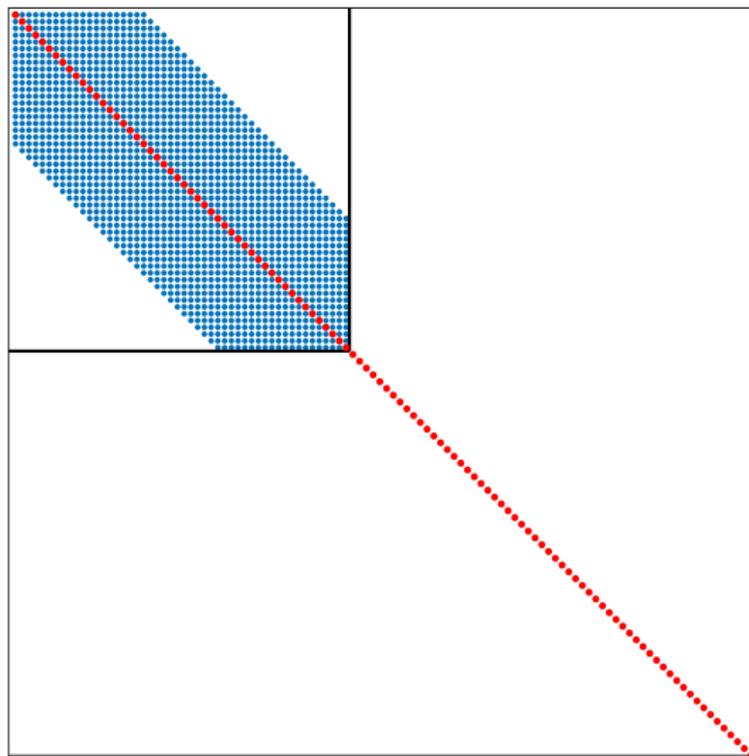
$$Z_2(r)r^2 + Z_1r + Y < r,$$

alors  $F$  a un unique zéro dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\bar{X}, r)$ .

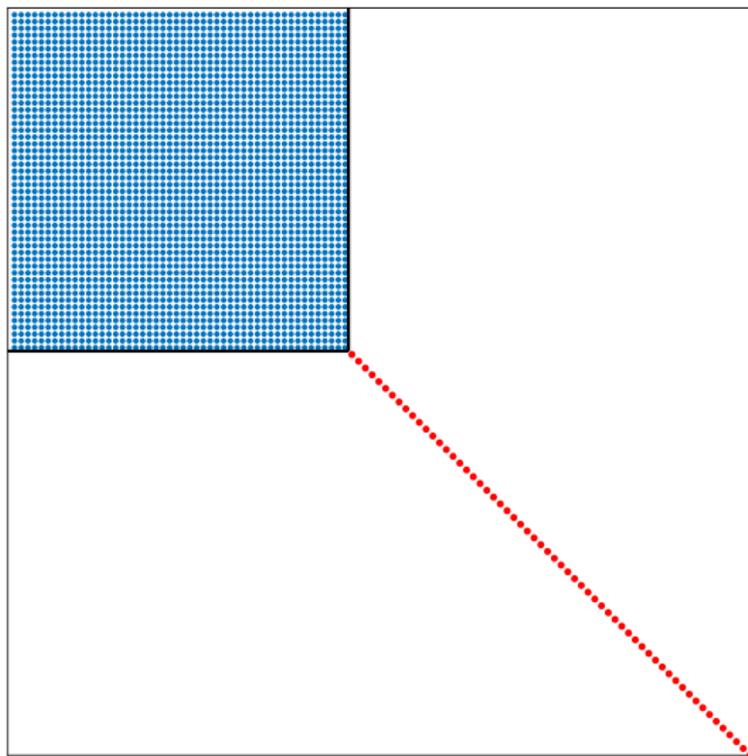
$$DF(\bar{X}) =$$



$$DF(\bar{X}) \simeq$$



$A :=$



## Retour au système SKT

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v, & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

## Retour au système SKT

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v, & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- Les conditions au bord rendent naturelle l'utilisation des séries de Fourier

$$u(x) = u_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cos(k\pi x), \quad v(x) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos(k\pi x).$$

- En utilisant cet ansatz directement dans les équations stationnaires, on obtient

$$\begin{cases} -(\pi k)^2(d_1u_k + d_{12}[uv]_k) + r_1u_k - a_1[u^2]_k - b_1[uv]_k = 0 \\ -(\pi k)^2d_2v_k + r_2v_k - a_2[v^2]_k - b_2[uv]_k = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} -(\pi k)^2(d_1 u_k + d_{12}[uv]_k) + r_1 u_k - a_1[u^2]_k - b_1[uv]_k = 0 \\ -(\pi k)^2 d_2 v_k + r_2 v_k - a_2[v^2]_k - b_2[uv]_k = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} -(\pi k)^2(d_1 u_k + d_{12}[uv]_k) + r_1 u_k - a_1[u^2]_k - b_1[uv]_k = 0 \\ -(\pi k)^2 d_2 v_k + r_2 v_k - a_2[v^2]_k - b_2[uv]_k = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- Ce système d'équation algébrique pourrait être un candidat pour notre formulation  $F(X) = 0$  formulation, avec

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \\ (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad F = \begin{pmatrix} F(u) \\ F(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_k^{(u)})_{k \in \mathbb{N}} \\ (F_k^{(v)})_{k \in \mathbb{N}} \end{pmatrix}$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$F_k^{(u)}(X) = -(\pi k)^2(d_1 u_k + d_{12}[uv]_k) + r_1 u_k - a_1[u^2]_k - b_1[uv]_k,$$

$$F_k^{(v)}(X) = -(\pi k)^2 d_2 v_k + r_2 v_k - a_2[v^2]_k - b_2[uv]_k.$$

$$\begin{cases} -(\pi k)^2(d_1 u_k + d_{12}[uv]_k) + r_1 u_k - a_1[u^2]_k - b_1[uv]_k = 0 \\ -(\pi k)^2 d_2 v_k + r_2 v_k - a_2[v^2]_k - b_2[uv]_k = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- Ce système d'équation algébrique pourrait être un candidat pour notre formulation  $F(X) = 0$  formulation, avec

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \\ (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad F = \begin{pmatrix} F(u) \\ F(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_k^{(u)})_{k \in \mathbb{N}} \\ (F_k^{(v)})_{k \in \mathbb{N}} \end{pmatrix}$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$F_k^{(u)}(X) = -(\pi k)^2(d_1 u_k + d_{12}[uv]_k) + r_1 u_k - a_1[u^2]_k - b_1[uv]_k,$$

$$F_k^{(v)}(X) = -(\pi k)^2 d_2 v_k + r_2 v_k - a_2[v^2]_k - b_2[uv]_k.$$

- Cependant, avec cette formulation il est très difficile de d'obtenir une inverse approchée  $A$  de  $DF(\bar{X})$ , à cause du terme de diffusion croisée  $-(\pi k)^2[uv]_k$  où toutes les fréquences interviennent.

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v, & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v, & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- Le changement de variables  $w = (d_1 + d_{12}v)u$  donne

$$\begin{cases} 0 = w'' + \left( r_1 - a_1 \frac{w}{d_1 + d_{12}v} - b_1v \right) \frac{w}{d_1 + d_{12}v}, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + \left( r_2 - b_2 \frac{w}{d_1 + d_{12}v} - a_2v \right) v, & \text{sur } (0, 1), \\ w'(0) = w'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = ((d_1 + d_{12}v)u)'' + (r_1 - a_1u - b_1v)u, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2u - a_2v)v, & \text{sur } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- Le changement de variables  $w = (d_1 + d_{12}v)u$  donne

$$\begin{cases} 0 = w'' + \left( r_1 - a_1 \frac{w}{d_1 + d_{12}v} - b_1v \right) \frac{w}{d_1 + d_{12}v}, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + \left( r_2 - b_2 \frac{w}{d_1 + d_{12}v} - a_2v \right) v, & \text{sur } (0, 1), \\ w'(0) = w'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- En introduisant  $p = \frac{1}{d_1 + d_{12}v}$  on obtient

$$\begin{cases} 0 = w'' + (r_1 - a_1wp - b_1v)wp, & \text{on } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2wp - a_2v)v, & \text{on } (0, 1), \\ w'(0) = w'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

$$p = \frac{1}{d_1 + d_{12}v}, \quad \begin{cases} 0 = w'' + (r_1 - a_1wp - b_1v)wp, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2wp - a_2v)v, & \text{sur } (0, 1), \\ w'(0) = w'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

$$p = \frac{1}{d_1 + d_{12}v}, \quad \begin{cases} 0 = w'' + (r_1 - a_1wp - b_1v)wp, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2wp - a_2v)v, & \text{sur } (0, 1), \\ w'(0) = w'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- Pour obtenir un système équivalent, on rajoute l'équation différentielle satisfaite par  $p$ , avec la condition initiale appropriée :

$$\begin{cases} 0 = w'' + (r_1 - a_1wp - b_1v)wp, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = d_2v'' + (r_2 - b_2wp - a_2v)v, & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = p' + d_{12}p^2v', & \text{sur } (0, 1), \\ 0 = p(0)(d_1 + d_{12}v(0)) - 1, \\ w'(0) = w'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

- Lorsqu'on utilise les séries de Fourier avec cette formulation, on obtient à nouveau asymptotiquement un terme dominant diagonal pour  $DF(X)$ , ce qui nous permet d'utiliser les techniques de *validation a posteriori*.

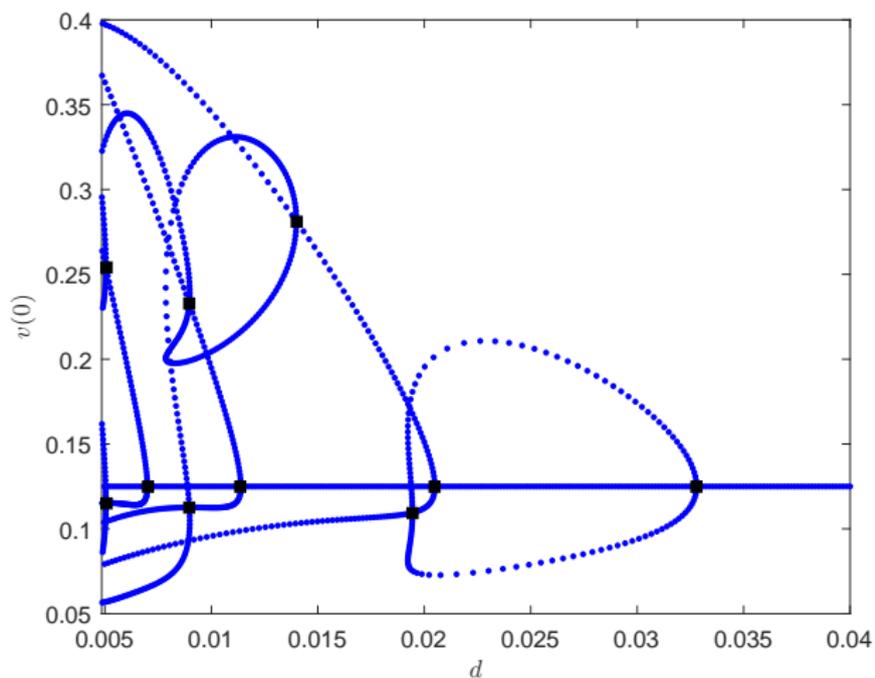


Figure: Un diagramme de bifurcation d'états stationnaires validés pour le système SKT triangulaire.  $\Omega = (0, 1)$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $d_{12} = 3$ ,  $d_{21} = 0$  et  $d_1 = d_2 = d$  est le paramètre de bifurcation.

Pour chaque état stationnaire validé, on dispose d'une solution approchée

$$\bar{u}(x) = \bar{u}_0 + 2 \sum_{k=1}^K \bar{u}_k \cos(k\pi x), \quad \bar{v}(x) = \bar{v}_0 + 2 \sum_{k=1}^K \bar{v}_k \cos(k\pi x),$$

Pour chaque état stationnaire validé, on dispose d'une solution approchée

$$\bar{u}(x) = \bar{u}_0 + 2 \sum_{k=1}^K \bar{u}_k \cos(k\pi x), \quad \bar{v}(x) = \bar{v}_0 + 2 \sum_{k=1}^K \bar{v}_k \cos(k\pi x),$$

pour laquelle on a donc démontré qu'il existait une unique solution

$$u(x) = u_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cos(k\pi x), \quad v(x) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos(k\pi x),$$

satisfaisant

$$|u_0 - \bar{u}_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |u_k - \bar{u}_k| \nu^k \leq r, \quad |v_0 - \bar{v}_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |v_k - \bar{v}_k| \nu^k \leq r$$

où  $\nu \geq 1$  et  $r$  sont connus explicitement.

Pour chaque état stationnaire validé, on dispose d'une solution approchée

$$\bar{u}(x) = \bar{u}_0 + 2 \sum_{k=1}^K \bar{u}_k \cos(k\pi x), \quad \bar{v}(x) = \bar{v}_0 + 2 \sum_{k=1}^K \bar{v}_k \cos(k\pi x),$$

pour laquelle on a donc démontré qu'il existait une unique solution

$$u(x) = u_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cos(k\pi x), \quad v(x) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos(k\pi x),$$

satisfaisant

$$|u_0 - \bar{u}_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |u_k - \bar{u}_k| \nu^k \leq r, \quad |v_0 - \bar{v}_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |v_k - \bar{v}_k| \nu^k \leq r$$

où  $\nu \geq 1$  et  $r$  sont connus explicitement.

► Pour ce problème,  $K \simeq 200$ ,  $\nu \simeq 1.05$ ,  $r \simeq 10^{-10}$ .

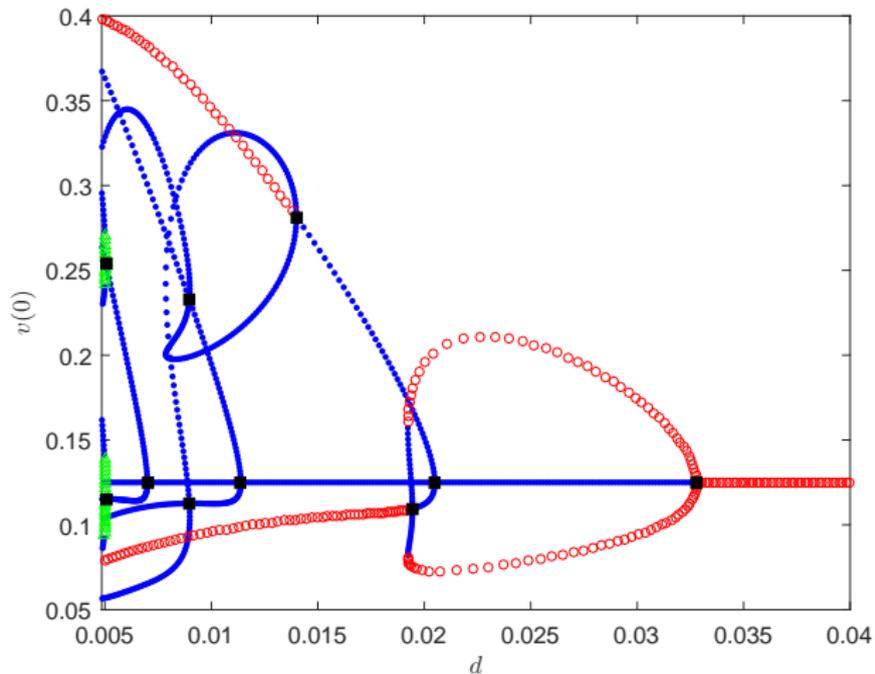


Figure: Point bleu : solution validée, instabilité linéaire validée. Triangle vert : solution validée, instabilité linéaire suspectée. Rond rouge : solution validée, stabilité linéaire suspectée.

**MERCI DE VOTRE ATTENTION!**