Observabilité pour des opérateurs singuliers

Rémi Buffe

Inria Nancy - Institut Elie Cartan de Lorraine

22 Mars 2018

JEF 2018 - Nancy

L'équation des ondes amorties

Equation des ondes amorties avec conditions de Dirichlet

$$(E)\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) + a(x)\partial_t u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \\ u(t=0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(t=0,x) = u_1(x), \end{cases}$$

avec $a(x)$ fonction positive supportée sur un sous-ensemble ω ouvert de Ω.

$$\frac{d}{dt}E(u,t) = -\int_\Omega a(x)|\partial_t u|^2 \leq 0,$$

où

$$E(u,t) = ||\partial_t u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

$\longrightarrow$ **Décroissance de l'énergie**

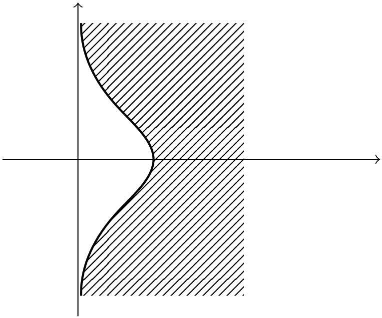
L’équation des ondes amorties

On réécrit sous la forme d’une équation d’évolution

$$\frac{d}{dt}U(t) + BU(t) = 0, \quad U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & a(x) \end{pmatrix}.$$

$$U(t) = e^{-tB}U(0).$$

Spectre de B



Le comportement de $U(t)$ peut être décrit par le spectre de B. Le spectre n’est pas sur l’axe imaginaire.

Vitesse de décroissance ?

L'équation des ondes amorties

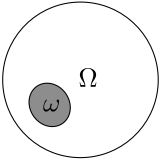
Le théorème suivant relie la position du spectre avec la décroissance de l'énergie.

Théorème (Lebeau 96, Burq 98, Batty-Duyckaerts 08, ...)

On a le résultat suivant

$$|||(B - i\sigma Id)^{-1}||| \leq Ce^{C|\sigma|}, \quad \sigma \in \mathbb{R} \Longrightarrow E(u,t)^{1/2} \leq C_k \frac{||B^k U(0)||}{\log(2+t)^k}$$

- **la décroissance exponentielle** est hautement reliée à la géométrie de Ω et la localisation du terme d'amortissement $\Rightarrow$ **Condition de Contrôle Géométrique**. Ici, on a aucune condition géométrique.



Estimée de résolvante

Objectif : montrer

$$|||(B - i\sigma Id)^{-1}||| \leq Ce^{C|\sigma|}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

On se ramène à

$$||u||^2_{H^1(\Omega)} \leq Ce^{C|\sigma|} \left(\int_\omega |u|^2 + \int_\Omega |g|^2 \right)$$

pour u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u - \sigma^2 u = g & \text{dans } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On se ramène à montrer une inégalité de Carleman pour l'opérateur avec paramètre spectral $-\Delta - \sigma^2$.

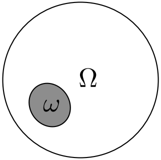
1. Introduction
   - Stabilisation de l'équation des ondes amorties
   - Contrôle à zéro de l'équation de la chaleur

2. Inégalités de Carleman
   - Cadre elliptique
   - Cadre singulier

Equation de la chaleur

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$.

$$(E) \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = \chi_\omega f(t,x) \\ u_{|\partial\Omega}(t,x) = 0 \\ u(t=0,x) = u_0(x) \end{cases}$$



Définition

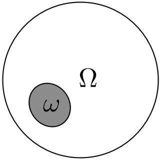
On dit que l'équation (E) est ***contrôlable à zéro*** *en temps $T > 0$, si pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $f \in L^2((0,T) \times \omega)$ tel que*

$$u(T) = 0.$$

Equation de la chaleur

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$.

$$(E)\begin{cases}\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = \chi_\omega f(t,x)\\ u_{|\partial\Omega}(t,x) = 0\\ u(t=0,x) = u_0(x)\end{cases}$$



Définition

*On dit que l'équation (E) est **contrôlable à zéro** en temps $T > 0$, si pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $f \in L^2((0,T)\times\omega)$ tel que*

$$u(T) = 0.$$

Théorème (Lebeau-Robbiano (95), Fursikov-Imanuvilov (96))

Soit $T > 0$. L'équation de la chaleur est contrôlable à zéro en temps T.

Stratégie de Lebeau-Robbiano : utilisation de l'inégalité spectrale sur les basses fréquences.

$$\text{Décomposition spectrale } (\lambda_j, \phi_j),$$

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \lambda_k \longrightarrow +\infty.$$

Théorème (Lebeau-Robbiano, Jerison-Lebeau, Lebeau-Zuazua)

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\Lambda \geq 1$,

$$||z||_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{C\sqrt{\Lambda}}||z||_{L^2(\omega)}, \quad z \in \text{Vect}\{\phi_k,\ \lambda_k \leq \Lambda\}.$$

- la constante explose lorsqu'on ajoute des modes
- contrôle à zéro sur des ensembles mesurables en temps, contrôle impulsionnel, stabilisation en temps fini, ...
- inégalité spectrale : observabilité sur les sommes finies de fonctions propres

$$\longrightarrow \text{Equation ?}$$

L'opérateur augmenté

On considère

$$w(s,x) = \sum_{\lambda_j \le \Lambda} \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_j} s)}{\sqrt{\lambda_j}} a_j \phi_j(x), \quad z(x) = \sum_{\lambda_j \le \Lambda} a_j \phi_j(x).$$

où $a_j \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{j \ge 0} |a_j|^2 < \infty$. On a alors

$$\begin{cases} -\partial_s^2 w - \Delta_x w = 0 & \text{dans } (0, S_0) \times \Omega := Z \\ w_{|_{\partial\Omega}} = 0 & \text{sur } (0, S_0) \times \partial\Omega \\ w_{|_{s=0}} = 0 & \text{sur } \{0\} \times \Omega \\ \partial_s w_{|_{s=0}} = z & \text{sur } \{0\} \times \Omega. \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Inégalités de Carleman pour $P = -\partial_s^2 - \Delta$

Inégalité à l'intérieur

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, et φ une fonction poids admissible

Théorème (Inégalité de Carleman elliptique)

Il existe $\tau_0 > 0$ tel que pour tout $u \in C_0^\infty(U)$, et pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\tau^{3/2}||e^{\tau\varphi}u||_{L^2(U)} + \tau^{1/2}||e^{\tau\varphi}\nabla u||_{L^2(U)} + \tau^{-1/2}||e^{\tau\varphi}\sum_{i,j}\partial_{i,j}^2 u||_{L^2(U)} \lesssim ||e^{\tau\varphi}\Delta u||_{L^2(U)}.$$

Remarques

- Inégalité d'énergie à poids exponentiel
- Le poids permet concentrer l'information sur ω
- Perte de demi-dérivée par rapport à la régularité elliptique
- Principale difficulté : contruction des poids

Idées de preuve

Pour montrer une inégalité de la forme,

$$\tau^{\gamma}||e^{\tau\varphi}u||_{L^2(U)} \lesssim ||e^{\tau\varphi}\Delta u||_{L^2(U)}$$

on peut montrer

$$\tau^{\gamma}||v||_{L^2(U)} \lesssim ||\Delta_{\varphi}v||_{L^2(U)}$$

avec

- $v = e^{\tau\varphi}u$
- $\begin{aligned} -\Delta_{\varphi} &= -e^{\tau\varphi}\Delta e^{-\tau\varphi} \text{ (opérateur conjugué par le poids)} \\ &\simeq -\Delta - \tau^2|\nabla\varphi|^2 + 2\tau\nabla\varphi\cdot\nabla \end{aligned}$

$\longrightarrow$ symbole principal : $p_{\varphi}(x,\xi,\tau) = |\xi|^2 - \tau^2|\nabla\varphi|^2 + 2i\tau\nabla\varphi\cdot\xi$

Idées de preuve

Pour montrer une inégalité de la forme,

$$\tau^\gamma ||e^{\tau\varphi} u||_{L^2(U)} \lesssim ||e^{\tau\varphi} \Delta u||_{L^2(U)}$$

on peut montrer

$$\tau^\gamma ||v||_{L^2(U)} \lesssim ||\Delta_\varphi v||_{L^2(U)}$$

avec

- $v = e^{\tau\varphi} u$
- $$\begin{aligned} -\Delta_\varphi &= -e^{\tau\varphi}\Delta e^{-\tau\varphi} \text{ (opérateur conjugué par le poids)} \\ &\simeq -\Delta - \tau^2 |\nabla\varphi|^2 + 2\tau\nabla\varphi \cdot \nabla \end{aligned}$$

  $\longrightarrow$ symbole principal : $p_\varphi(x, \xi, \tau) = |\xi|^2 - \tau^2|\nabla\varphi|^2 + 2i\tau\nabla\varphi \cdot \xi$
- $-\Delta_\varphi$ n'est pas elliptique

Idées de preuve

Pour montrer une inégalité de la forme,

$$\tau^\gamma ||e^{\tau\varphi}u||_{L^2(U)} \lesssim ||e^{\tau\varphi}\Delta u||_{L^2(U)}$$

on peut montrer

$$\tau^\gamma ||v||_{L^2(U)} \lesssim ||\Delta_\varphi v||_{L^2(U)}$$

avec

- $v = e^{\tau\varphi}u$
- $\begin{aligned} -\Delta_\varphi &= -e^{\tau\varphi}\Delta e^{-\tau\varphi} \text{ (opérateur conjugué par le poids)} \\ &\simeq -\Delta - \tau^2|\nabla\varphi|^2 + 2\tau\nabla\varphi\cdot\nabla \end{aligned}$

  $\longrightarrow$ symbole principal : $p_\varphi(x,\xi,\tau) = |\xi|^2 - \tau^2|\nabla\varphi|^2 + 2i\tau\nabla\varphi\cdot\xi$
- $-\Delta_\varphi$ n'est pas elliptique
- on écrit $-\Delta_\varphi = P_2 + iP_1$ avec

$$p_2(x,\xi,\tau) = |\xi|^2 - \tau^2|\nabla\varphi|^2, \quad p_1(x,\xi,\tau) = 2\tau\nabla\varphi\cdot\xi$$

Idées de preuve

Par intégration par parties

$$|| -\Delta_\varphi v||_{L^2}^2 \geq \left(\left(\frac{\mu}{\tau} P_2^2 + i[P_2, P_1]\right) v, v\right)_{L^2} = \frac{1}{\tau}\left(\left(\mu P_2^2 + i\tau[P_2, P_1]\right) v, v\right)_{L^2}.$$

Le symbole principal de $\mu P_2^2 + i\tau[P_2, P_1]$ est donné par

$$m(x, \xi, \tau) = \mu p_2(x, \xi, \tau)^2 + \tau\{p_2, p_1\}(x, \xi, \tau).$$

But : construire un poids φ tel que $m(x, \xi, \tau) > 0$.

Condition de sous-ellipticitié de Hörmander :

$$p_2(x, \xi, \tau) = p_1(x, \xi, \tau) = 0 \Longrightarrow \{p_2, p_1\}(x, \xi, \tau) > 0.$$

- Positivité du crochet sur la variété caractéristique

Problème polygonal

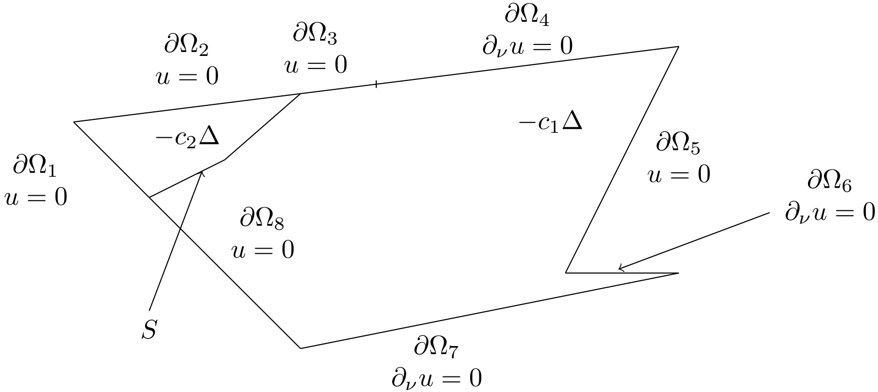


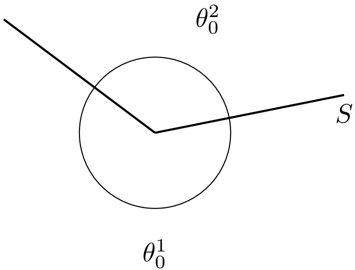
FIGURE – Un exemple de polygone avec une interface brisée S.

On considère l'opérateur

$$T = -\operatorname{div} a(x)\nabla$$

avec $a(x)$ fonction positive constante par morceaux.

Réduction locale en coordonées polaires



Localement près d'un coin :

$$T = -\partial_r^2 - \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2}\,\mathrm{div}_\theta\, b(\theta)\nabla_\theta$$

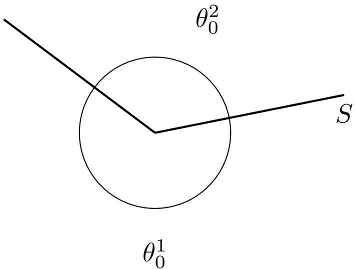
et $L^2(\Omega)$ devient $L^2(\Omega, rdrd\theta)$

$$v = r^{1/2}u.$$

On diagonalise $-\Delta_\theta$ selon une base de Hilbert (e_k, ν_k), $\nu_k \geq 0$,

$$T_k = -\partial_r^2 + \left(\nu_k - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}.$$

Réduction locale en coordonées polaires



Localement près d'un coin :

$$T = -\partial_r^2 - \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2}\,\mathrm{div}_\theta\, b(\theta)\nabla_\theta$$

et $L^2(\Omega)$ devient $L^2(\Omega, rdrd\theta)$

$$v = r^{1/2}u.$$

On diagonalise $-\Delta_\theta$ selon une base de Hilbert (e_k, ν_k), $\nu_k \geq 0$,

$$T_k = -\partial_r^2 + \left(\nu_k - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}.$$

Lemme (Inégalité de Hardy en dimension un)

Soit $R > 0$. Il existe $C > 0$ telle que pour tout $z \in H_0^1(0, R)$.

$$\int_0^R |z|^2 dr \leq C \int_0^R \left(|z'|^2 - \frac{1}{4}\frac{|z|^2}{r^2}\right) dr.$$

Carleman uniforme pour l'opérateur $T_k - \sigma^2$

- $T_k = -\partial_r^2 + (\nu_k - \frac{1}{4})\frac{1}{r^2}$
- Vancostenoble-Zuazua (08), Ervedoza (08)
- Choix de la fonction poids $\varphi(r) = r^2$

Théorème (B. 17)

Pour $\nu_k = 0$. Il existe $C > 0$ tel que

$$\tau \int_0^R e^{\tau\varphi}\left(|\partial_r z|^2 + \left(\nu_k - \frac{1}{4}\right)\frac{|z|^2}{r^2}\right) + \tau^3 \int_0^R e^{\tau\varphi} r^2 |z|^2 \leq C \int_0^R e^{\tau\varphi} |(T_k - \sigma^2) z|^2,$$

pour tout $\tau \geq 1$, pour tout $\sigma \geq 1$, et pour tout $z \in \mathcal{H}_{\frac{1}{4}}(0, R)$.

Remarque :

- Perte d'une dérivée entière !

Idées de preuve

Comme dans le cas classique, on écrit :

$$\begin{aligned} T_{k,\varphi} - \sigma^2 &= e^{\tau\varphi}(T_k - \sigma^2)e^{-\tau\varphi} \\ &= T_2 - \sigma^2 + iT_1 \end{aligned}$$

Dans ce cadre, $\varphi(r) = r^2$ fournit un crochet strictement positif :

$$\{t_2 - \sigma^2, t_1\} = \{t_2, t_1\} > 0$$

et donc

$$\begin{aligned} ||(T_{k,\varphi} - \sigma^2)z||^2_{L^2} &= ||(T_2 - \sigma^2)z||^2_{L^2} + ||T_1 z||^2_{L^2} + \Big(i[T_2, T_1]z, z\Big)_{L^2} \\ &\geq \Big(i[T_2, T_1]z, z\Big)_{L^2} \\ &\geq C||z||^2 \end{aligned}$$

L'opérateur augmenté

Il faut considérer l'opérateur augmenté

$$P_k = -\partial_s^2 - \partial_r^2 + (\nu_k - \frac{1}{4})\frac{1}{r^2}$$

Difficultés :

L'opérateur augmenté

Il faut considérer l'opérateur augmenté

$$P_k = -\partial_s^2 - \partial_r^2 + (\nu_k - \frac{1}{4})\frac{1}{r^2}$$

Difficultés :

- dimension supérieure

L'opérateur augmenté

Il faut considérer l'opérateur augmenté

$$P_k = -\partial_s^2 - \partial_r^2 + (\nu_k - \frac{1}{4})\frac{1}{r^2}$$

Difficultés :

- dimension supérieure
- construction du poids de Carleman et obtention d'une bonne inégalité

L'opérateur augmenté

Il faut considérer l'opérateur augmenté

$$P_k = -\partial_s^2 - \partial_r^2 + (\nu_k - \frac{1}{4})\frac{1}{r^2}$$

Difficultés :

- dimension supérieure
- construction du poids de Carleman et obtention d'une bonne inégalité

On prend le poids singulier anisotrope

$$\varphi(x, s, \tau) = \tau x^2 - \frac{\tau^{2/3} s^2}{\nu}$$

- $\tau^{2/3}$ dans la direction de s $\rightarrow$ lié à la perte de dérivée entière en x.

Idées de preuve

Contrairement au cas précédent, on utilise vraiment une certaine forme de sous-ellipticité (au moins formellement).

$$\varphi(x,s,\tau) = \tau x^2 - \frac{\tau^{2/3}s^2}{\nu}$$

On écrit

$$\begin{aligned} P_{k,\varphi} &= e^{\tau\varphi_\varepsilon} P_k e^{-\tau\varphi_\varepsilon} \\ &= Q_2^x + Q_2^s + i(Q_1^x + Q_1^s) \end{aligned}$$

et on a

$$\{q_2, q_1\} = \underbrace{\{q_2^x, q_1^x\}}_{\substack{>0 \\ \textit{(de l'ordre de } \tau^2\textit{)}}} + \underbrace{\{q_2^s, q_1^s\}}_{\substack{<0 \\ \textit{(de l'ordre de } \tau^2\textit{)}}}$$

Idées de preuve

Contrairement au cas précédent, on utilise vraiment une certaine forme de sous-ellipticité (au moins formellement).

$$\varphi(x,s,\tau) = \tau x^2 - \frac{\tau^{2/3}s^2}{\nu}$$

On écrit

$$\begin{aligned} P_{k,\varphi} &= e^{\tau\varphi_\varepsilon} P_k e^{-\tau\varphi_\varepsilon} \\ &= Q_2^x + Q_2^s + i(Q_1^x + Q_1^s) \end{aligned}$$

et on a

$$\{q_2, q_1\} = \underbrace{\{q_2^x, q_1^x\}}_{\substack{>0 \\ \textit{(de l'ordre de } \tau^2)}} + \underbrace{\{q_2^s, q_1^s\}}_{\substack{<0 \\ \textit{(de l'ordre de } \tau^2)}}$$

Les deux direction x et s sont reliées sur la variété caractéristique.

Inégalité spectrale

Soit Ω un polygone borné de $\mathbb{R}^2$.

Théorème (B. 17)

Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert de Ω. Alors, il existe $C > 0$ tels que pour tout $(a_j) \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$$\sum_{\lambda_j \leq \Lambda} |a_j|^2 \leq Ce^{C\Lambda^{3/4^+}} \int_\omega \Big| \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} a_j \phi_j \Big|^2, \quad \Lambda > 1.$$

- contrôle á zéro pour l'équation de la chaleur associée.

Cadre d'un opérateur avec potentiel en carré inverse

Les méthodes précédentes se transposent. Ici, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

$$\begin{cases} -\Delta u - \dfrac{\mu}{|x|^2} u = f & \text{dans } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour $\mu \leq \mu^* = \frac{(d-2)^2}{4}$.

- Vasquez-Zuazua (99) (Etude du problème direct)
- Vancostenoble-Zuazua (08), Ervedoza (08) (Contrôle à zéro de la chaleur)
- Vancostenoble-Zuazua (09) (Contrôle des ondes)

Cadre d'un opérateur qui dégénère au bord

Pour $\Omega = (0,1)$, et $P = -\partial_x x^\alpha \partial_x$.

- Cannarsa-Martinez-Vancostenoble ((05) ... (18)) (Contrôle à zéro de la chaleur),
- Gueye, Moyano, Alabau-Boussouira, ...

Théorème (B., Phung - 18)

Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert de Ω. Alors, il existe $C > 0$ tels que pour tout $(a_j) \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$$\sum_{\lambda_j \leq \Lambda} |a_j|^2 \leq C e^{C\Lambda^{3/4^+}} \int_\omega \Big| \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} a_j \phi_j \Big|^2, \quad \Lambda > 1.$$

Conclusion

Résultats obtenus :

$\diamond$ Stabilisation logarithmique de l'équation des ondes amorties sur des polygones en présence de

- conditions mixtes Dirichlet-Neumann
- interfaces (lignes brisées) qui rencontrent le bord
- interfaces (lignes brisées) qui se croisent

Conclusion

Résultats obtenus :

◇ Stabilisation logarithmique de l'équation des ondes amorties sur des polygones en présence de

- conditions mixtes Dirichlet-Neumann
- interfaces (lignes brisées) qui rencontrent le bord
- interfaces (lignes brisées) qui se croisent

◇ Inégalités spectrales de type Lebeau-Robbiano sur des polygones, pour des opérateurs avec potentiels en carrés inverses, pour des opérateurs qui dégénèrent

- contrôle à zéro de la chaleur
- stabilisation en temps fini de la chaleur