# Analyse de modèles de mélanges : vers la justification d'un modèle faisant intervenir deux lois d'état différentes

Cosmin Burtea (Institut Camille Jordan, Villeurbanne)
Travail en cours avec
D. Bresch (CNRS et Univ. Savoie, Chambéry) et
F. Lagoutière (Institut Camille Jordan, Villeurbanne)

Journées Jeunes EDPistes 2018
Nancy, 21-23 Mars 2018

# Outline

# Première partie : Propagation d'oscillations dans les solutions du système de Navier-Stokes

# Le système de Navier-Stokes pour un fluide barotrope en $3D$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u \\ p = \rho^\gamma \end{cases} \tag{NSC}$$

- $\rho$ est la densité du fluide
- $u$ est le champ de vitesses
- $\mu, \lambda$ coefficients de viscosité
- $p(\rho) = \rho^\gamma$ la pression

# Le système de Navier-Stokes pour un fluide barotrope en $3D$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u \\ p = \rho^\gamma \end{cases} \tag{NSC}$$

- $\rho$ est la densité du fluide
- $u$ est le champ de vitesses
- $\mu, \lambda$ coefficients de viscosité
- $p(\rho) = \rho^\gamma$ la pression

Solutions faibles globales:

⊡ P.L. Lions ('98) : $\gamma > 9/5$ (E. Fereisl $\gamma > 3/2$), $(\rho_0, \rho_0^{\frac{1}{2}} u_0) \in L^1(\Omega) \cap L^\gamma(\Omega) \times (L^2(\Omega))^3$ avec $\Omega$ =domaine borné, $\mathbb{T}^3$ ou $\mathbb{R}^3$. il existe une solution faible globale, d'énergie finie :

$$\int_\Omega \rho |u|^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \rho^\gamma + \int_0^t \int_\Omega \mu |\nabla u|^2 + (\mu + \lambda)(\operatorname{div} u)^2 \leq \int_\Omega \rho_0 |u_0|^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \rho_0^\gamma$$

# Propagation d'oscillations

Comment les oscillations se propagent-elles dans les solutions du système de Navier-Stokes ? Plus, précisement, on considére une suite de solutions du système de Navier-Stokes (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t(\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu\Delta u^n + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases}$$

avec les données initiales $(\rho_0^n, u_0^n) \to (\rho_0, u_0)$ faiblement.

# Propagation d'oscillations

Comment les oscillations se propagent-elles dans les solutions du système de Navier-Stokes ? Plus, précisement, on considére une suite de solutions du système de Navier-Stokes (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t (\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases}$$

avec les données initiales $(\rho_0^n, u_0^n) \to (\rho_0, u_0)$ faiblement.

Question : Quel système d'EDP vérifiera la limitie faible $\lim_n (\rho^n, u^n) = (\rho, u)$?

# Propagation d'oscillations

Comment les oscillations se propagent-elles dans les solutions du système de Navier-Stokes ? Plus, précisement, on considére une suite de solutions du système de Navier-Stokes (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t (\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases}$$

avec les données initiales $(\rho_0^n, u_0^n) \to (\rho_0, u_0)$ faiblement.

Question : Quel système d'EDP vérifiera la limitie faible $\lim_n (\rho^n, u^n) = (\rho, u)$?

Exemple :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

# Propagation d'oscillations

Comment les oscillations se propagent-elles dans les solutions du système de Navier-Stokes ? Plus, précisement, on considére une suite de solutions du système de Navier-Stokes (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t (\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases}$$

avec les données initiales $(\rho_0^n, u_0^n) \to (\rho_0, u_0)$ faiblement.

Question : Quel système d'EDP vérifiera la limitie faible $\lim_n (\rho^n, u^n) = (\rho, u)$?

Exemple :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

$$\begin{cases} \left(\mathcal{C}_k^N\right)_k \text{ une partition de } \mathbb{R}^3 \text{ en cubes d'hauteur } 1/2^N \text{ et soit } x_k \text{ le centre de } \mathcal{C}_k^N, \\ \\ \end{cases}$$

# Propagation d'oscillations

Comment les oscillations se propagent-elles dans les solutions du système de Navier-Stokes ? Plus, précisement, on considére une suite de solutions du système de Navier-Stokes (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t (\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases}$$

avec les données initiales $(\rho_0^n, u_0^n) \to (\rho_0, u_0)$ faiblement.

Question : Quel système d'EDP vérifiera la limitie faible $\lim_n (\rho^n, u^n) = (\rho, u)$?

Exemple :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

$$\begin{cases} \left(\mathcal{C}_k^N\right)_k \text{ une partition de } \mathbb{R}^3 \text{ en cubes d'hauteur } 1/2^N \text{ et soit } x_k \text{ le centre de } \mathcal{C}_k^N, \\ \mathcal{C}_{k,+}^N, \text{ le cube centré en } x_k, \text{d'hauteur } \frac{\alpha_{+,0}(x_k)^{\frac{1}{3}}}{2^N} \text{ et } \mathcal{C}_{k,-}^N = \mathcal{C}_k^N \backslash \mathcal{C}_{k,+}^N \\ \end{cases}$$

# Propagation d'oscillations

Comment les oscillations se propagent-elles dans les solutions du système de Navier-Stokes ? Plus, précisement, on considére une suite de solutions du système de Navier-Stokes (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t(\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases}$$

avec les données initiales $(\rho_0^n, u_0^n) \to (\rho_0, u_0)$ faiblement.
Question : Quel système d'EDP vérifiera la limitie faible $\lim_n (\rho^n, u^n) = (\rho, u)$?
Exemple :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

$$\begin{cases} \left(\mathcal{C}_k^N\right)_k \text{ une partition de } \mathbb{R}^3 \text{ en cubes d'hauteur } 1/2^N \text{ et soit } x_k \text{ le centre de } \mathcal{C}_k^N, \\ \mathcal{C}_{k,+}^N, \text{ le cube centré en } x_k, \text{d'hauteur } \frac{\alpha_{+,0}(x_k)^{\frac{1}{3}}}{2^N} \text{ et } \mathcal{C}_{k,-}^N = \mathcal{C}_k^N \backslash \mathcal{C}_{k,+}^N \\ \rho_0^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k,+}^N}(x)\rho_{+,0}(x) + \mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k,-}^N}(x)\rho_{-,0}(x) \end{cases}$$

# Propagation d'oscillations

Comment les oscillations se propagent-elles dans les solutions du système de Navier-Stokes ? Plus, précisement, on considére une suite de solutions du système de Navier-Stokes (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t (\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases}$$

avec les données initiales $(\rho_0^n, u_0^n) \to (\rho_0, u_0)$ faiblement.
Question : Quel système d'EDP vérifiera la limitie faible $\lim_n (\rho^n, u^n) = (\rho, u)$?
Exemple :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

$$\begin{cases} \left(\mathcal{C}_k^N\right)_k \text{ une partition de } \mathbb{R}^3 \text{ en cubes d'hauteur } 1/2^N \text{ et soit } x_k \text{ le centre de } \mathcal{C}_k^N, \\ \mathcal{C}_{k,+}^N, \text{ le cube centré en } x_k, \text{d'hauteur } \frac{\alpha_{+,0}(x_k)^{\frac{1}{3}}}{2^N} \text{ et } \mathcal{C}_{k,-}^N = \mathcal{C}_k^N \backslash \mathcal{C}_{k,+}^N \\ \rho_0^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k,+}^N}(x) \rho_{+,0}(x) + \mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k,-}^N}(x) \rho_{-,0}(x) \end{cases}$$

- $d = 1$ : D.Serre '91, W. E '92, Amasov et Zlotnik '97

# Propagation d'oscillations

Comment les oscillations se propagent-elles dans les solutions du système de Navier-Stokes ? Plus, précisement, on considére une suite de solutions du système de Navier-Stokes (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t(\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases}$$

avec les données initiales $(\rho_0^n, u_0^n) \to (\rho_0, u_0)$ faiblement.
Question : Quel système d'EDP vérifiera la limitie faible $\lim_n (\rho^n, u^n) = (\rho, u)$?
Exemple :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

$$\begin{cases} \left(\mathcal{C}_k^N\right)_k \text{ une partition de } \mathbb{R}^3 \text{ en cubes d'hauteur } 1/2^N \text{ et soit } x_k \text{ le centre de } \mathcal{C}_k^N, \\ \mathcal{C}_{k,+}^N, \text{ le cube centré en } x_k, \text{d'hauteur } \frac{\alpha_{+,0}(x_k)^{\frac{1}{3}}}{2^N} \text{ et } \mathcal{C}_{k,-}^N = \mathcal{C}_k^N \backslash \mathcal{C}_{k,+}^N \\ \rho_0^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k,+}^N}(x) \rho_{+,0}(x) + \mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k,-}^N}(x) \rho_{-,0}(x) \end{cases}$$

- $d = 1$ : D.Serre '91, W. E '92, Amasov et Zlotnik '97
- $d \geq 2$ : M. Hillairet '05, D.Bresch et X. Huang '11, P. I. Plotinkov et J. Sokolowski '12, D. Bresch et M. Hillairet '15.

# Propagation d'oscillations dans les solutions du système de Navier-Stokes

- les oscillations initiales de la vitesse sont dissipées par la viscosité (Hoff et Smoller '85 en $d = 1$)

# Propagation d'oscillations dans les solutions du système de Navier-Stokes

- les oscillations initiales de la vitesse sont dissipées par la viscosité (Hoff et Smoller '85 en $d = 1$)
- continuité/compacité du flux effectif (Hoff et Smoller '85 en $d = 1$, P.L. Lions '98 en dimension $d \geq 2$)

# Propagation d'oscillations dans les solutions du système de Navier-Stokes

- les oscillations initiales de la vitesse sont dissipées par la viscosité (Hoff et Smoller '85 en $d = 1$)
- continuité/compacité du flux effectif (Hoff et Smoller '85 en $d = 1$, P.L. Lions '98 en dimension $d \geq 2$)
- utilisation de la théorie de mesures de Young pour décrire les oscillations (D. Serre '91 pour $d = 1$, M. Hillairet '05 pour $d = 3$)

# Passage à la limite pour une suite oscillante de NSC

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t (\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^n. \end{array} \right. \tag{NSC}$$

# Passage à la limite pour une suite oscillante de NSC

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t (\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases} \tag{NSC}$$

- Estimation d'énergie :

$$\int \frac{1}{2}\rho^n |u^n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho^n)^\gamma + \int_0^T \int \mu\, |\nabla u^n|^2 + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u^n)^2$$
$$\leq \int \frac{1}{2}\rho_0^n |u_0^n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^n)^\gamma \leq E_0.$$

# Passage à la limite pour une suite oscillante de NSC

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0,\\ \partial_t(\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n\otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu\Delta u^n + (\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div} u^n.\end{array}\right. \tag{NSC}$$

- Estimation d'énergie :

$$\int \frac{1}{2}\rho^n|u^n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho^n)^\gamma + \int_0^T\int \mu\,|\nabla u^n|^2 + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u^n)^2$$
$$\leq \int \frac{1}{2}\rho_0^n|u_0^n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^n)^\gamma \leq E_0.$$

- Intégrabilité supplémentaire pour la densité (Lions '98) : en multipliant par "$\Delta^-\nabla(\rho_n^\alpha)$" où $\alpha=\alpha(\gamma)>0$ si $\gamma>3/2$,on arrive à montrer que :

$$\|\rho^n\|_{L^{\gamma+\alpha}((0,T)\times\Omega)} \leq C_{T,E_0}.$$

# Passage à la limite pour une suite oscillante de NSC

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \operatorname{div}(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t (\rho^n u^n) + \operatorname{div}(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu \Delta u^n + (\mu+\lambda) \nabla \operatorname{div} u^n. \end{cases} \tag{NSC}$$

- Estimation d'énergie :

$$\int \frac{1}{2}\rho^n |u^n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho^n)^\gamma + \int_0^T \int \mu |\nabla u^n|^2 + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u^n)^2$$
$$\leq \int \frac{1}{2}\rho_0^n |u_0^n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^n)^\gamma \leq E_0.$$

- Intégrabilité supplémentaire pour la densité (Lions '98) : en multipliant par "$\Delta^- \nabla(\rho_n^\alpha)$" où $\alpha = \alpha(\gamma) > 0$ si $\gamma > 3/2$,on arrive à montrer que :

$$\|\rho^n\|_{L^{\gamma+\alpha}((0,T)\times\Omega)} \leq C_{T,E_0}.$$

Par passage à la limite, on a ($\bar{p} = \lim \rho_n^\gamma$)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \bar{p} = \mu \Delta u + (\mu+\lambda) \nabla \operatorname{div} u. \end{cases}$$

# Passage à la limite pour une suite oscillante de NSC

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n + \mathrm{div}\,(\rho^n u^n) = 0, \\ \partial_t\,(\rho^n u^n) + \mathrm{div}\,(\rho^n u^n \otimes u^n) + \nabla(\rho^n)^\gamma = \mu\Delta u^n + (\mu+\lambda)\,\nabla\,\mathrm{div}\, u^n. \end{cases} \tag{NSC}$$

- Estimation d'énergie :

$$\int \frac{1}{2}\rho^n|u^n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho^n)^\gamma + \int_0^T \int \mu\,|\nabla u^n|^2 + (\mu+\lambda)\,(\mathrm{div}\, u^n)^2$$
$$\leq \int \frac{1}{2}\rho_0^n|u_0^n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^n)^\gamma \leq E_0.$$

- Intégrabilité supplémentaire pour la densité (Lions '98) : en multipliant par "$\Delta^{-}\nabla(\rho_n^\alpha)$" où $\alpha = \alpha\,(\gamma) > 0$ si $\gamma > 3/2$,on arrive à montrer que :

$$\|\rho^n\|_{L^{\gamma+\alpha}((0,T)\times\Omega)} \leq C_{T,E_0}.$$

Par passage à la limite, on a ($\bar{p} = \lim \rho_n^\gamma$)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho u) = 0, \\ \partial_t\,(\rho u) + \mathrm{div}\,(\rho u \otimes u) + \nabla\bar{p} = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\,\nabla\,\mathrm{div}\, u. \end{cases}$$

$$\bar{p} = \rho^\gamma \iff \rho_{n,0} \to \rho_0 \text{ fortement dans } L^1_{loc}\,(\Omega)$$

# Mesures de Young

## Definition

Soit $(\rho_n)_n$, $\rho_n \geq 0$, une suite bornée dans $L^q((0,T)\times\Omega)$. Alors, il existe une famille $\nu : (0,T)\times\Omega \to \mathcal{P}[0,\infty)$ telle que pour tout $\beta \in C([0,\infty))$ vérifiant

$$\beta(s) \leq C_\beta s^q \ \forall s \in [1,\infty)$$

pour un $C_\beta > 0$ alors, on a :

$$\begin{cases} \beta(\rho_n) \rightharpoonup \bar{\beta}, \\ \bar{\beta}(t,x) = \int_0^\infty \beta(z)\, d\nu_{t,x}(z) \ \text{ p.p. } \ (t,x) \in (0,T)\times\Omega. \end{cases}$$

# Mesures de Young

## Definition

Soit $(\rho_n)_n$, $\rho_n \geq 0$, une suite bornée dans $L^q((0,T)\times\Omega)$. Alors, il existe une famille $\nu : (0,T)\times\Omega \to \mathcal{P}[0,\infty)$ telle que pour tout $\beta \in C([0,\infty))$ vérifiant

$$\beta(s) \leq C_\beta s^q \ \forall s \in [1,\infty)$$

pour un $C_\beta > 0$ alors, on a :

$$\begin{cases} \beta(\rho_n) \rightharpoonup \bar{\beta}, \\ \bar{\beta}(t,x) = \int_0^\infty \beta(z)\, d\nu_{t,x}(z) \ \text{ p.p. } \ (t,x) \in (0,T)\times\Omega. \end{cases}$$

Exemple de famille de mesures de Young :

$$\rho_0^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \mathbf{1}_{C^N_{k,+}}(x)\rho_{+,0}(x) + \mathbf{1}_{C^N_{k,-}}(x)\rho_{-,0}(x)$$
$$\hookrightarrow \Xi_0(x) := \alpha_{+,0}(x)\,\delta_{\rho_{+,0}(x)} + \alpha_{-,0}(x)\,\delta_{\rho_{-,0}(x)}.$$

# Passage à la limite pour une suite oscillant de NSC

"En multipliant" la première équation de (NSC) par $b'(\rho^n)$ (démarche qui peut être rendue rigoureuse grâce à la théorie de Di Perna-Lions) on obtient :

$$\partial_t b(\rho^n) + \operatorname{div}(b(\rho^n)u^n) + (\rho^n b'(\rho^n) - b(\rho^n)) \operatorname{div} u^n = 0,$$

# Passage à la limite pour une suite oscillant de NSC

"En multipliant" la première équation de (NSC) par $b'(\rho^n)$ (démarche qui peut être rendue rigoureuse grâce à la théorie de Di Perna-Lions) on obtient :

$$\partial_t b(\rho^n) + \operatorname{div}(b(\rho^n)u^n) + (\rho^n b'(\rho^n) - b(\rho^n)) \operatorname{div} u^n = 0,$$

et par passage à la limite

$$\partial_t \overline{b(\rho)} + \operatorname{div}\left(\overline{b(\rho)})u\right) + \overline{(\rho b'(\rho) - b(\rho)) \operatorname{div} u} = 0, \tag{1}$$

# Passage à la limite pour une suite oscillant de NSC

"En multipliant" la première équation de (NSC) par $b'(\rho^n)$ (démarche qui peut être rendue rigoureuse grâce à la théorie de Di Perna-Lions) on obtient :

$$\partial_t b(\rho^n) + \operatorname{div}\left(b(\rho^n)u^n\right) + \left(\rho^n b'(\rho^n) - b(\rho^n)\right)\operatorname{div} u^n = 0,$$

et par passage à la limite

$$\partial_t \overline{b(\rho)} + \operatorname{div}\left(\overline{b(\rho)}\,u\right) + \overline{\left(\rho b'(\rho) - b(\rho)\right)\operatorname{div} u} = 0, \tag{1}$$

P.L. Lions('98) :

$$\begin{aligned}&\partial_t \overline{b(\rho)} + \operatorname{div}\left(\overline{b(\rho)}\,u^n\right) + \overline{\left(\rho b'(\rho) - b(\rho)\right.}\operatorname{div} u \\ &= \frac{1}{2\mu+\lambda}\left(\overline{\rho b'(\rho) - b(\rho)}\cdot\overline{\rho^\gamma} - \overline{\left(\rho b'(\rho) - b(\rho)\right)\rho^\gamma}\right),\end{aligned}$$

# Passage à la limite pour une suite oscillant de NSC

On rappele que

$$\|\rho_n\|_{L^{\gamma+\alpha(\gamma)}((0,T)\times\mathbb{R}^3)} \leq M$$

donc on introduit $\Xi : (0, T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}[0, \infty)$, une famille de mesures de Young associée à $(\rho^n)_n$.

# Passage à la limite pour une suite oscillant de NSC

On rappele que

$$\|\rho_n\|_{L^{\gamma+\alpha(\gamma)}((0,T)\times\mathbb{R}^3)} \leq M$$

donc on introduit $\Xi : (0,T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}\,[0,\infty)$, une famille de mesures de Young associée à $(\rho^n)_n$.
Le système vérifié par le couple $(\Xi, u)$ est (M. Hillairet '05) :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \langle \Xi, b\rangle + \operatorname{div}\left(\langle \Xi, b\rangle\, u\right) + \langle \Xi, Id\cdot b' - b\rangle \operatorname{div} u \\ = \frac{1}{2\mu+\lambda}\left(\langle \Xi, \mathrm{Id}\cdot b' - b\rangle \cdot \langle \Xi, \mathrm{Id}^\gamma\rangle - \langle \Xi, (\mathrm{Id}\cdot b' - b)\,\mathrm{Id}^\gamma\rangle\right) \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

# Passage à la limite pour une suite oscillant de NSC

On rappele que

$$\|\rho_n\|_{L^{\gamma+\alpha(\gamma)}((0,T)\times\mathbb{R}^3)} \leq M$$

donc on introduit $\Xi : (0, T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}\,[0, \infty)$, une famille de mesures de Young associée à $(\rho^n)_n$.
Le système vérifié par le couple $(\Xi, u)$ est (M. Hillairet '05) :

$$\begin{cases} \partial_t \langle \Xi, b\rangle + \operatorname{div}(\langle \Xi, b\rangle\, u) + \langle \Xi, Id \cdot b' - b\rangle \operatorname{div} u \\ = \frac{1}{2\mu+\lambda}\left(\langle \Xi, \mathrm{Id} \cdot b' - b\rangle \cdot \langle \Xi, \mathrm{Id}^\gamma\rangle - \langle \Xi, (\mathrm{Id} \cdot b' - b)\,\mathrm{Id}^\gamma\rangle\right) \\ \partial_t\left(\langle \Xi, \mathrm{Id}\rangle\, u\right) + \operatorname{div}\left(\langle \Xi, \mathrm{Id}\rangle\, u \otimes u\right) + \nabla \langle \Xi, \mathrm{Id}^\gamma\rangle = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u, \\ u_{|t=0} = u_0, \Xi_{|t=0} = \Xi_0 \end{cases}$$

où $\Xi_0$ est la mesures de Young associé à $(\rho_0^n)_n$

# Deuxième partie : Modèles multi-fluide

# Examples d'écoulements diphasique

- vagues de l'océan, la pluie, écoulements sanguins, avalanches;

# Examples d'écoulements diphasique

- vagues de l'océan, la pluie, écoulements sanguins, avalanches;
- modèles à phases séparées , modèles à phases en transition, modèles à phases dispérsées

# Examples d'écoulements diphasique

- vagues de l'océan, la pluie, écoulements sanguins, avalanches;
- modèles à phases séparées , modèles à phases en transition, modèles à phases dispérsées
- Applications : industrie nucléaire, systèmes antipollution, transport par gazoduc

## Modélisation de l'écoulement diphasique

- On considère l'écoulement d'un mélange de deux phases compressibles $\pm$ de densités $\rho_\pm$. On va noter $\rho$ la densité du mélange.

# Modélisation de l'écoulement diphasique

- On considère l'écoulement d'un mélange de deux phases compressibles $\pm$ de densités $\rho_{\pm}$. On va noter $\rho$ la densité du mélange.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_+}{V} + \frac{m_-}{V} = \frac{V_+}{V}\frac{m_+}{V_+} + \frac{V_-}{V}\frac{m_-}{V_-}$$
$$\stackrel{not.}{=} \alpha_+\rho_+ + \alpha_-\rho_-,$$

# Modélisation de l'écoulement diphasique

- On considère l'écoulement d'un mélange de deux phases compressibles $\pm$ de densités $\rho_\pm$. On va noter $\rho$ la densité du mélange.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_+}{V} + \frac{m_-}{V} = \frac{V_+}{V}\frac{m_+}{V_+} + \frac{V_-}{V}\frac{m_-}{V_-}$$
$$\stackrel{not.}{=} \alpha_+\rho_+ + \alpha_-\rho_-,$$

où

$$\alpha_+ + \alpha_- = 1.$$

# Modélisation de l'écoulement diphasique

- On considère l'écoulement d'un mélange de deux phases compressibles $\pm$ de densités $\rho_\pm$. On va noter $\rho$ la densité du mélange.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_+}{V} + \frac{m_-}{V} = \frac{V_+}{V}\frac{m_+}{V_+} + \frac{V_-}{V}\frac{m_-}{V_-}$$
$$\stackrel{not.}{=} \alpha_+\rho_+ + \alpha_-\rho_-,$$

  où

$$\alpha_+ + \alpha_- = 1.$$

- les deux espèces de fluide sont à l'équilibre en vitesse, autrement dit, localement en espace et à chaque instant il n'y a qu'un vecteur vitesse $u$.

# Modélisation de l'écoulement diphasique

- On considère l'écoulement d'un mélange de deux phases compressibles $\pm$ de densités $\rho_\pm$. On va noter $\rho$ la densité du mélange.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_+}{V} + \frac{m_-}{V} = \frac{V_+}{V}\frac{m_+}{V_+} + \frac{V_-}{V}\frac{m_-}{V_-}$$
$$\overset{not.}{=} \alpha_+\rho_+ + \alpha_-\rho_-,$$

  où

$$\alpha_+ + \alpha_- = 1.$$

- les deux espèces de fluide sont à l'équilibre en vitesse, autrement dit, localement en espace et à chaque instant il n'y a qu'un vecteur vitesse $u$.

Question de modélisation : trouver des équations vérifiées par $\alpha_\pm, \rho_\pm, u$.

# Modélisation de l'écoulement diphasique

On va considérer des données initiales qui imitent la structure d'un mélange : on fixe deux fractions volumiques initiales :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

# Modélisation de l'écoulement diphasique

On va considérer des données initiales qui imitent la structure d'un mélange : on fixe deux fractions volumiques initiales :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

respectivement

$$\rho_0^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \mathbf{1}_{C^N_{k,+}}(x)\rho_{+,0}(x) + \mathbf{1}_{C^N_{k,+}}(x)\rho_{-,0}(x), \tag{2}$$

# Modélisation de l'écoulement diphasique

On va considérer des données initiales qui imitent la structure d'un mélange : on fixe deux fractions volumiques initiales :

$$\alpha_{0,+}(x) + \alpha_{0,-}(x) = 1.$$

respectivement

$$\rho_0^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \mathbf{1}_{C_{k,+}^N}(x)\rho_{+,0}(x) + \mathbf{1}_{C_{k,+}^N}(x)\rho_{-,0}(x), \tag{2}$$

Pour les données initiales $(\rho_0^n)$ définies dans la rélation (2) :

$$\Xi_0(x) := \alpha_{+,0}(x)\,\delta_{\rho_{+,0}(x)} + \alpha_{-,0}(x)\,\delta_{\rho_{-,0}(x)}.$$

# Modèles multi-fluid

M. Hillairet '05 ansatz :

$$1)\ \Xi(t,x) = \alpha_+(t,x)\,\delta_{\rho_+(t,x)} + \alpha_-(t,x)\,\delta_{\rho_-(t,x)}$$

$$2)\ \rho_\pm(t,x) \in [\underline{\rho}_\pm, \overline{\rho}^\pm] \text{ et } [\underline{\rho}_-, \overline{\rho}^-] \cap [\underline{\rho}_+, \overline{\rho}^+] = \emptyset$$

# Modèles multi-fluid

M. Hillairet '05 ansatz :

$$1)\ \Xi(t,x) = \alpha_+(t,x)\,\delta_{\rho_+(t,x)} + \alpha_-(t,x)\,\delta_{\rho_-(t,x)}$$
$$2)\ \rho_\pm(t,x) \in [\underline{\rho}_\pm, \overline{\rho}^\pm] \text{ et } [\underline{\rho}_-, \overline{\rho}^-] \cap [\underline{\rho}_+, \overline{\rho}^+] = \emptyset$$

Il obtient le système :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_\pm + u\nabla\alpha_\pm = \frac{1}{2\mu+\lambda}\alpha_+\alpha_-\left(\rho_\pm^\gamma - \rho_\mp^\gamma\right), \\ \partial_t\left(\alpha_\pm\rho_\pm\right) + \operatorname{div}\left(\alpha_\pm\rho_\pm u\right) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla\left(\alpha_+\rho_+^\gamma + \alpha_-\rho_-^\gamma\right) = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u. \end{cases} \qquad (HNSC_1)$$

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

Justifier l'anstz (1) ci-dessus semble très difficile dans ce cadre de faible régularité.

## Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

Justifier l'anstz (1) ci-dessus semble très difficile dans ce cadre de faible régularité.

- D. Bresch et X. Huang ('11)
  Solutions faibles à regularité intermédiaire :

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

Justifier l'anstz (1) ci-dessus semble très difficile dans ce cadre de faible régularité.

- D. Bresch et X. Huang ('11)
  Solutions faibles à regularité intermédiaire :
  - D. Hoff ('94 et '95) :
    données proche d'équilibre $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0) \in L^2\left(\mathbb{R}^3\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^3\right) \times \left(L^2\left(\mathbb{R}^3\right) \cap L^6\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3$

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

Justifier l'anstz (1) ci-dessus semble très difficile dans ce cadre de faible régularité.

- D. Bresch et X. Huang ('11)
  Solutions faibles à regularité intermédiaire :
  - D. Hoff ('94 et '95) :
    données proche d'équilibre $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0) \in L^2\left(\mathbb{R}^3\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^3\right) \times \left(L^2\left(\mathbb{R}^3\right) \cap L^6\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3$
  - B. Desjardins ('97) :
    résultat d'existence locale $(\rho_0, u_0) \in L^\infty\left(\mathbb{T}^3\right) \times \left(H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^3$

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

Justifier l'anstz (1) ci-dessus semble très difficile dans ce cadre de faible régularité.

- D. Bresch et X. Huang ('11)
  Solutions faibles à regularité intermédiaire :
  - D. Hoff ('94 et '95) :
    données proche d'équilibre $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3) \times (L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3))^3$
  - B. Desjardins ('97) :
    résultat d'existence locale $(\rho_0, u_0) \in L^\infty(\mathbb{T}^3) \times (H^1(\mathbb{T}^3))^3$
  - Les solutions de Hoff-Desjardins permettent d'obtenir une solution faible avec $\operatorname{div} u \in L^1_t(L^\infty)$.

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

Justifier l'anstz (1) ci-dessus semble très difficile dans ce cadre de faible régularité.

- D. Bresch et X. Huang ('11)
  Solutions faibles à regularité intermédiaire :
  - D. Hoff ('94 et '95) :
    données proche d'équilibre $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3) \times (L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3))^3$
  - B. Desjardins ('97) :
    résultat d'existence locale $(\rho_0, u_0) \in L^\infty(\mathbb{T}^3) \times (H^1(\mathbb{T}^3))^3$
  - Les solutions de Hoff-Desjardins permettent d'obtenir une solution faible avec $\operatorname{div} u \in L^1_t(L^\infty)$.
- D. Bresch et M. Hillairet ('15)

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

Justifier l'anstz (1) ci-dessus semble très difficile dans ce cadre de faible régularité.

- D. Bresch et X. Huang ('11)
  Solutions faibles à regularité intermédiaire :
  - D. Hoff ('94 et '95) :
    données proche d'équilibre $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3) \times (L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3))^3$
  - B. Desjardins ('97) :
    résultat d'existence locale $(\rho_0, u_0) \in L^\infty(\mathbb{T}^3) \times (H^1(\mathbb{T}^3))^3$
  - Les solutions de Hoff-Desjardins permettent d'obtenir une solution faible avec $\operatorname{div} u \in L^1_t(L^\infty)$.
- D. Bresch et M. Hillairet ('15)

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

$$
\begin{cases}
\partial_t \alpha_\pm + u \nabla \alpha_\pm = \frac{1}{2\mu+\lambda} \alpha_+ \alpha_- (\rho_\pm^\gamma - \rho_\mp^\gamma), \\
\partial_t (\alpha_\pm \rho_\pm) + \operatorname{div} (\alpha_\pm \rho_\pm u) = 0, \\
\partial_t (\rho u) + \operatorname{div} (\rho u \otimes u) + \nabla (\alpha_+ \rho_+^\gamma + \alpha_- \rho_-^\gamma) = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u.
\end{cases}
\tag{$HNSC_1$}
$$

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_\pm + u \nabla \alpha_\pm = \frac{1}{2\mu+\lambda} \alpha_+ \alpha_- \left(\rho_\pm^\gamma - \rho_\mp^\gamma\right), \\ \partial_t \left(\alpha_\pm \rho_\pm\right) + \operatorname{div}\left(\alpha_\pm \rho_\pm u\right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho u\right) + \operatorname{div}\left(\rho u \otimes u\right) + \nabla\left(\alpha_+ \rho_+^\gamma + \alpha_- \rho_-^\gamma\right) = \mu \Delta u + \left(\mu + \lambda\right) \nabla \operatorname{div} u. \end{cases} \qquad (HNSC_1)$$

Derivation d'un modèle à deux pressions différentes :

## Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_\pm + u \nabla \alpha_\pm = \frac{1}{2\mu+\lambda} \alpha_+ \alpha_- (\rho_\pm^\gamma - \rho_\mp^\gamma), \\ \partial_t (\alpha_\pm \rho_\pm) + \operatorname{div} (\alpha_\pm \rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \operatorname{div} (\rho u \otimes u) + \nabla (\alpha_+ \rho_+^\gamma + \alpha_- \rho_-^\gamma) = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u. \end{cases} \qquad (HNSC_1)$$

Derivation d'un modèle à deux pressions différentes :

- Choisir un autre modèle de départ

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_\pm + u \nabla \alpha_\pm = \frac{1}{2\mu+\lambda} \alpha_+ \alpha_- \left(\rho_\pm^\gamma - \rho_\mp^\gamma\right), \\ \partial_t \left(\alpha_\pm \rho_\pm\right) + \operatorname{div}\left(\alpha_\pm \rho_\pm u\right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho u\right) + \operatorname{div}\left(\rho u \otimes u\right) + \nabla \left(\alpha_+ \rho_+^\gamma + \alpha_- \rho_-^\gamma\right) = \mu \Delta u + \left(\mu + \lambda\right) \nabla \operatorname{div} u. \end{cases} \qquad (HNSC_1)$$

Derivation d'un modèle à deux pressions différentes :

- Choisir un autre modèle de départ
- Construire des solutions à la Hoff-Desjardins

# Un système pour l'ecoulement d'un mélange de deux phases

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_\pm + u\nabla\alpha_\pm = \frac{1}{2\mu+\lambda}\alpha_+\alpha_-(\rho_\pm^\gamma - \rho_\mp^\gamma), \\ \partial_t(\alpha_\pm\rho_\pm) + \operatorname{div}(\alpha_\pm\rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla(\alpha_+\rho_+^\gamma + \alpha_-\rho_-^\gamma) = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u. \end{cases} \quad (HNSC_1)$$

Derivation d'un modèle à deux pressions différentes :

- Choisir un autre modèle de départ
- Construire des solutions à la Hoff-Desjardins
- reprendre le processus d'homogénéisation

# Vers la justification d'un modèle faisant intervenir deux lois d'état différents

# Modèle macroscopique

Hypothèses :

- chaque espèce $\pm$ est caractérisée par une loi $P_\pm$ ;

# Modèle macroscopique

Hypothèses :

- chaque espèce $\pm$ est caractérisée par une loi $P_\pm$ ;
- les deux espèces de fluide sont à l'équilibre en vitesse, c.à.d. à chaque instant il n'y a qu'un vecteur vitesse $u$ ;

# Modèle macroscopique

Hypothèses :

- chaque espèce $\pm$ est caractérisée par une loi $P_{\pm}$ ;
- les deux espèces de fluide sont à l'équilibre en vitesse, c.à.d. à chaque instant il n'y a qu'un vecteur vitesse $u$ ;

# Modèle macroscopique

Hypothèses :

- chaque espèce $\pm$ est caractérisée par une loi $P_\pm$ ;
- les deux espèces de fluide sont à l'équilibre en vitesse, c.à.d. à chaque instant il n'y a qu'un vecteur vitesse $u$ ;
- les fluides sont mélangés à l'échelle de l'expérience mais restent séparés à une échelle plus fine :

$$\mathrm{int}\,(\mathrm{supp}\,\rho_+) \cap \mathrm{int}\,(\mathrm{supp}\,\rho_-) = \emptyset.$$

# Modèle macroscopique

Hypothèses :

- chaque espèce $\pm$ est caractérisée par une loi $P_\pm$ ;
- les deux espèces de fluide sont à l'équilibre en vitesse, c.à.d. à chaque instant il n'y a qu'un vecteur vitesse $u$ ;
- les fluides sont mélangés à l'échelle de l'expérience mais restent séparés à une échelle plus fine :

$$\mathrm{int}\,(\mathrm{supp}\,\rho_+) \cap \mathrm{int}\,(\mathrm{supp}\,\rho_-) = \emptyset.$$

- chaque fluide vérifie le système de Navier-Stokes pour un fluide compressible dans son domaine.

# Modèle macroscopique

Hypothèses :

- chaque espèce $\pm$ est caractérisée par une loi $P_\pm$ ;
- les deux espèces de fluide sont à l'équilibre en vitesse, c.à.d. à chaque instant il n'y a qu'un vecteur vitesse $u$ ;
- les fluides sont mélangés à l'échelle de l'expérience mais restent séparés à une échelle plus fine :

$$\mathrm{int}\,(\mathrm{supp}\,\rho_+) \cap \mathrm{int}\,(\mathrm{supp}\,\rho_-) = \emptyset.$$

- chaque fluide vérifie le système de Navier-Stokes pour un fluide compressible dans son domaine.
- on suppose qu'au niveau de l'interface on a l'égalité des flux :

$$\mu(\nabla u + \nabla^t u) + (\lambda\,\mathrm{div}\,u - P_+(\rho_+))\,\mathrm{Id} = \mu(\nabla u + \nabla^t u) + (\lambda\,\mathrm{div}\,u - P_-(\rho_-))\,\mathrm{Id}$$

# Choisir le modèle de départ

Toutes ces suppositions se réécrivent en équations de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\pm + \operatorname{div}(\rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u, \\ p = P_+(\rho_+) + P_-(\rho_-). \end{cases} \tag{3}$$

# Choisir le modèle de départ

Toutes ces suppositions se réécrivent en équations de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\pm + \operatorname{div}(\rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u, \\ p = P_+(\rho_+) + P_-(\rho_-). \end{cases} \tag{3}$$

solutions faibles globales : A. Vasseur, H. Wen et C. Yu '18, A. Novotný et M. Pokorný '18 solutions à la P.L. Lions

# Choisir le modèle de départ

Toutes ces suppositions se réécrivent en équations de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\pm + \operatorname{div}(\rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u, \\ p = P_+(\rho_+) + P_-(\rho_-). \end{cases} \tag{3}$$

solutions faibles globales : A. Vasseur, H. Wen et C. Yu ′18, A. Novotný et M. Pokorný ′18 solutions à la P.L. Lions

Questions ouvertes relatives au système (3) :

- solutions à la Hoff-Desjardins en autorisant le vide ( $p = P(\rho_+, \rho\_)$?) ?

# Choisir le modèle de départ

Toutes ces suppositions se réécrivent en équations de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\pm + \operatorname{div}(\rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u, \\ p = P_+(\rho_+) + P_-(\rho_-). \end{cases} \tag{3}$$

solutions faibles globales : A. Vasseur, H. Wen et C. Yu '18, A. Novotný et M. Pokorný '18 solutions à la P.L. Lions

Questions ouvertes relatives au système (3) :

- solutions à la Hoff-Desjardins en autorisant le vide ( $p = P(\rho_+, \rho\_)$?) ? (solutions classiques?)

# Choisir le modèle de départ

Toutes ces suppositions se réécrivent en équations de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\pm + \operatorname{div}(\rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u, \\ p = P_+ (\rho_+) + P_- (\rho_-) . \end{cases} \tag{3}$$

solutions faibles globales : A. Vasseur, H. Wen et C. Yu '18, A. Novotný et M. Pokorný '18 solutions à la P.L. Lions

Questions ouvertes relatives au système (3) :

- solutions à la Hoff-Desjardins en autorisant le vide ( $p = P(\rho_+, \rho\_)$?) ? (solutions classiques?)
- limite d'un suite de solutions à données fortement oscillantes?

# Construction de solutions à la Hoff-Desjardins

Idée de Hoff :

# Construction de solutions à la Hoff-Desjardins

Idée de Hoff :

$$\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) = \rho(\partial_t u + u\nabla u) \overset{not.}{:=} \rho\dot{u}.$$

# Construction de solutions à la Hoff-Desjardins

Idée de Hoff :

$$\partial_t (\rho u) + \mathrm{div}\,(\rho u \otimes u) = \rho(\partial_t u + u \nabla u) \stackrel{not.}{:=} \rho \dot{u}.$$

donc

$$\rho \dot{u} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla\, \mathrm{div}\, u + \nabla p = 0.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \mu\, \mathrm{curl}\, u = \Delta^{-1}\, \mathrm{curl}(\rho \dot{u}), \\ (2\mu + \lambda)\, \mathrm{div}\, u - (p - p_\infty) = \Delta^{-1}\, \mathrm{div}\,(\rho \dot{u})\,. \end{cases}$$

# Construction de solutions à la Hoff-Desjardins

Idée de Hoff :

$$\partial_t (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho(\partial_t u + u \nabla u) \stackrel{not.}{:=} \rho \dot{u}.$$

donc

$$\rho \dot{u} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u + \nabla p = 0.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \mu \operatorname{curl} u = \Delta^{-1} \operatorname{curl}(\rho \dot{u}), \\ (2\mu + \lambda) \operatorname{div} u - (p - p_\infty) = \Delta^{-1} \operatorname{div}(\rho \dot{u}). \end{cases}$$

$$\|\nabla u\|_{L^6} \leq \|p - p_\infty\|_{L^6} + \|\rho \dot{u}\|_{L^2}.$$

# Construction de solutions à la Hoff-Desjardins

Idée de Hoff :

$$\partial_t (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho(\partial_t u + u\nabla u) \overset{not.}{:=} \rho\dot{u}.$$

donc

$$\rho\dot{u} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u + \nabla p = 0.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \mu \operatorname{curl} u = \Delta^{-1} \operatorname{curl}(\rho\dot{u}), \\ (2\mu+\lambda) \operatorname{div} u - (p - p_\infty) = \Delta^{-1} \operatorname{div}(\rho\dot{u}). \end{cases}$$

$$\|\nabla u\|_{L^6} \leq \|p - p_\infty\|_{L^6} + \|\rho\dot{u}\|_{L^2}.$$

$$\|(2\mu+\lambda) \operatorname{div} u - (p - p^\infty)\|_{L^\infty} \leq \|\rho\dot{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\rho\dot{u}\|_{L^6}^{\frac{1}{2}}$$

# Estimations pour $\rho\dot{u}$

- estimation d'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho u^2 + H_+(\rho_+) + H_-(\rho_-) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mu\,|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)\,(\mathrm{div}\, u)^2$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho_0 {u_0}^2 + H_+(\rho_{+,0}) + H_-(\rho_{-,0}) \leq E_0.$$

# Estimations pour $\rho\dot{u}$

- estimation d'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho u^2 + H_+(\rho_+) + H_-(\rho_-) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mu\,|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)\,(\operatorname{div} u)^2$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho_0 {u_0}^2 + H_+(\rho_{+,0}) + H_-(\rho_{-,0}) \leq E_0.$$

où

$$H_\pm(\rho_\pm) = \rho_\pm \int_{\bar\rho_\pm}^{\rho_\pm} \frac{P_\pm(s) - P_\pm(\bar\rho_\pm)}{s^2} ds = H''(\bar\rho_\pm + \theta(\rho_\pm - \bar\rho_\pm)) \frac{(\rho_\pm - \bar\rho_\pm)^2}{2}$$
$$\geq \inf_{s\in[0,M^\star]} H''(s) \frac{(\rho_\pm - \bar\rho_\pm)^2}{2} = \inf_{s\in[0,M^\star]} \frac{P'_\pm(s)}{s} \frac{(\rho_\pm - \bar\rho_\pm)^2}{2}$$

# Estimations pour $\rho\dot{u}$

- estimation d'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho u^2 + H_+(\rho_+) + H_-(\rho_-) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mu\,|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)\,(\mathrm{div}\, u)^2$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho_0 {u_0}^2 + H_+(\rho_{+,0}) + H_-(\rho_{-,0}) \leq E_0.$$

où

$$H_\pm\left(\rho_\pm\right) = \rho_\pm \int_{\bar{\rho}_\pm}^{\rho_\pm} \frac{P_\pm\left(s\right) - P_\pm\left(\bar{\rho}_\pm\right)}{s^2} ds = H''\left(\bar{\rho}_\pm + \theta\left(\rho_\pm - \bar{\rho}_\pm\right)\right) \frac{\left(\rho_\pm - \bar{\rho}_\pm\right)^2}{2}$$
$$\geq \inf_{s\in[0,M^\star]} H''\left(s\right) \frac{\left(\rho_\pm - \bar{\rho}_\pm\right)^2}{2} = \inf_{s\in[0,M^\star]} \frac{P'_\pm\left(s\right)}{s} \frac{\left(\rho_\pm - \bar{\rho}_\pm\right)^2}{2}$$

$$\inf_{s\in[0,M^\star]} \frac{P'_\pm\left(s\right)}{s} \geq C_{M^\star}$$

# Estimations pour $\rho\dot{u}$

- estimation d'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho u^2 + H_+(\rho_+) + H_-(\rho_-) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mu\,|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)\,(\mathrm{div}\, u)^2$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho_0 {u_0}^2 + H_+(\rho_{+,0}) + H_-(\rho_{-,0}) \leq E_0.$$

où

$$H_\pm(\rho_\pm) = \rho_\pm \int_{\bar\rho_\pm}^{\rho_\pm} \frac{P_\pm(s) - P_\pm(\bar\rho_\pm)}{s^2}\,ds = H''\left(\bar\rho_\pm + \theta\left(\rho_\pm - \bar\rho_\pm\right)\right)\frac{(\rho_\pm - \bar\rho_\pm)^2}{2}$$
$$\geq \inf_{s\in[0,M^\star]} H''(s)\,\frac{(\rho_\pm - \bar\rho_\pm)^2}{2} = \inf_{s\in[0,M^\star]} \frac{P'_\pm(s)}{s}\,\frac{(\rho_\pm - \bar\rho_\pm)^2}{2}$$

$$\inf_{s\in[0,M^\star]} \frac{P'_\pm(s)}{s} \geq C_{M^\star}$$

cette condition est vérifié par des lois de type

$$P(\rho_\pm) = A_\pm \rho_\pm^{\gamma_\pm}.$$

# Estimations pour $\rho\dot{u}$

- estimation d'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho u^2 + H_+(\rho_+) + H_-(\rho_-) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \mu\,|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)\,(\operatorname{div} u)^2$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\rho_0 {u_0}^2 + H_+(\rho_{+,0}) + H_-(\rho_{-,0}) \leq E_0.$$

où

$$H_\pm(\rho_\pm) = \rho_\pm \int_{\bar{\rho}_\pm}^{\rho_\pm} \frac{P_\pm(s) - P_\pm(\bar{\rho}_\pm)}{s^2} ds = H''(\bar{\rho}_\pm + \theta(\rho_\pm - \bar{\rho}_\pm)) \frac{(\rho_\pm - \bar{\rho}_\pm)^2}{2}$$
$$\geq \inf_{s\in[0,M^\star]} H''(s) \frac{(\rho_\pm - \bar{\rho}_\pm)^2}{2} = \inf_{s\in[0,M^\star]} \frac{P'_\pm(s)}{s} \frac{(\rho_\pm - \bar{\rho}_\pm)^2}{2}$$

$$\inf_{s\in[0,M^\star]} \frac{P'_\pm(s)}{s} \geq C_{M^\star}$$

cette condition est vérifié par des lois de type

$$P(\rho_\pm) = A_\pm \rho_\pm^{\gamma_\pm}.$$

- $$D(t) = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (\rho_1(s,x) + \rho_2(s,x))$$

# Estimations pour $\rho\dot{u}$

- on multiplie la deuxième équation par $\dot{u}$ et on retrouve que :

$$
\begin{aligned}
A_1(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mu \nabla u : \nabla u + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \rho\, |\dot{u}|^2 \\
&\lesssim (A_1(0) + E_0) + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^3}^3 ,
\end{aligned}
$$

# Estimations pour $\rho\dot{u}$

- on multiplie la deuxième équation par $\dot{u}$ et on retrouve que :

$$A_1(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mu\nabla u : \nabla u + (\mu+\lambda)(\operatorname{div} u)^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \rho\,|\dot{u}|^2$$
$$\lesssim (A_1(0) + E_0) + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^3}^3,$$

- on applique l'operateur $\partial_t + u\nabla\cdot$ et on multiplie par $\min(t,1)\dot{u}$ et on retruove une estimation pour :

$$A_2(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \sigma(t)\,\rho\,|\dot{u}|^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(t)\left(\mu\nabla\dot{u} : \nabla\dot{u} + (\mu+\lambda)(\operatorname{div}\dot{u})^2\right)$$
$$\lesssim (A_1(0) + E_0) + \int_0^t \sigma(t)\,\|\nabla u\|_{L^4}^4.$$

# Difficultés

La structure algébrique du flux effectif mélange les deux densités :

$$F := (2\mu + \lambda)\,\mathrm{div}\, u - \left(\left(P_+\left(\rho_+\right) - P_+\left(\rho_+^\infty\right)\right) + \left(P_-\left(\rho_-\right) - P_-\left(\rho_-^\infty\right)\right)\right).$$

# Difficultés

La structure algébrique du flux effectif mélange les deux densités :

$$F := (2\mu + \lambda)\,\mathrm{div}\, u - \left(\left(P_+\left(\rho_+\right) - P_+\left(\rho_+^\infty\right)\right) + \left(P_-\left(\rho_-\right) - P_-\left(\rho_-^\infty\right)\right)\right).$$

Pour adapter l'approche utilisée par D. Hoff on doit demander :

$$\frac{\left(P_+\left(\rho_+\right) - P_+\left(\rho_+^\infty\right)\right) + \left(P_-\left(\rho_-\right) - P_-\left(\rho_-^\infty\right)\right)}{\left(\rho_+ + \rho_-\right) - \left(\rho_+^\infty + \rho_-^\infty\right)} \geq 0. \tag{4}$$

# Difficultés

La structure algébrique du flux effectif mélange les deux densités :

$$F := (2\mu + \lambda)\,\mathrm{div}\, u - \left(\left(P_+(\rho_+) - P_+(\rho_+^\infty)\right) + \left(P_-(\rho_-) - P_-(\rho_-^\infty)\right)\right).$$

Pour adapter l'approche utilisée par D. Hoff on doit demander :

$$\frac{\left(P_+(\rho_+) - P_+(\rho_+^\infty)\right) + \left(P_-(\rho_-) - P_-(\rho_-^\infty)\right)}{(\rho_+ + \rho_-) - (\rho_+^\infty + \rho_-^\infty)} \geq 0. \tag{4}$$

L'inégalité (4) n'est pas vérifiée pour toute loi de pression de type :

$$P_\pm(\rho_\pm) = A_\pm \rho_\pm^{\gamma_\pm}.$$

## Approche découpage hautes-basses fréquences

Pour tout $w$ on introduit les notations

$$\begin{cases} w^l = \mathcal{F}(\chi \widehat{w^l}), \\ w^h = w - w^l, \end{cases}$$

où $\chi \in C_c\,(B(0,1))$ avec $\chi = 1$ sur $B(0,1/2)$.

$$\begin{cases} (2\mu+\lambda)\operatorname{div} u - (p - p^\infty) = \Delta^{-1}\operatorname{div}(\rho\dot{u}), \\ (2\mu+\lambda)\operatorname{div} u^h - (p - p^\infty)^h = \Delta^{-1}\operatorname{div}(\rho\dot{u})^h. \end{cases}$$

# Approche découpage hautes-basses fréquences

Pour tout $w$ on introduit les notations

$$\begin{cases} w^l = \mathcal{F}(\chi\widehat{w^l}), \\ w^h = w - w^l, \end{cases}$$

où $\chi \in C_c\left(B(0,1)\right)$ avec $\chi = 1$ sur $B(0,1/2)$.

$$\begin{cases} (2\mu+\lambda)\,\mathrm{div}\,u - (p-p^\infty) = \Delta^{-1}\,\mathrm{div}(\rho\dot{u}), \\ (2\mu+\lambda)\,\mathrm{div}\,u^h - (p-p^\infty)^h = \Delta^{-1}\,\mathrm{div}(\rho\dot{u})^h. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \left\|(p-p^\infty)^h\right\|_{L^2_T(L^2)} &\lesssim \|\mathrm{div}\,u\|_{L^2_T(L^2)} + \|\rho\dot{u}\|_{L^2_T(L^2)} \\ &\lesssim A_0^{\frac{1}{2}}(0) + D^{\frac{1}{2}}(t)\,A_1^{\frac{1}{2}}(t)\,. \end{aligned}$$

# Approche découpage hautes-basses fréquences

Pour tout $w$ on introduit les notations

$$\begin{cases} w^l = \mathcal{F}(\chi \widehat{w^l}), \\ w^h = w - w^l, \end{cases}$$

où $\chi \in C_c\left(B(0,1)\right)$ avec $\chi = 1$ sur $B(0,1/2)$.

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)\operatorname{div} u - (p - p^\infty) = \Delta^{-1}\operatorname{div}(\rho\dot{u}), \\ (2\mu + \lambda)\operatorname{div} u^h - (p - p^\infty)^h = \Delta^{-1}\operatorname{div}(\rho\dot{u})^h. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \left\|(p - p^\infty)^h\right\|_{L^2_T(L^2)} &\lesssim \|\operatorname{div} u\|_{L^2_T(L^2)} + \|\rho\dot{u}\|_{L^2_T(L^2)} \\ &\lesssim A_0^{\frac{1}{2}}(0) + D^{\frac{1}{2}}(t)\, A_1^{\frac{1}{2}}(t)\,. \end{aligned}$$

On combine avec

$$\left\|\nabla u^h\right\|_{L^r} \lesssim \left\|(p - p^\infty)^h\right\|_{L^r} + \|\rho\dot{u}\|_{L^{\frac{3r}{3+r}}}\,.$$

# Homogénéisation

On considère des données initiales telles que

$$\rho^n_{+,0}\rho^n_{-,0} = 0.$$

# Homogénéisation

On considère des données initiales telles que

$$\rho^n_{+,0}\rho^n_{-,0} = 0.$$

On considère une suite $\left(\rho^n_\pm, u^n\right)$ déterminée par

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n_\pm + \operatorname{div}\left(\rho^n_\pm u\right) = 0, \\ \partial_t\left(\rho^n u^n\right) + \operatorname{div}\left(\rho^n u^n \otimes u^n\right) + \nabla p^n = \mu \Delta u^n + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u^n, \\ p^n = P_+\left(\rho^n_+\right) + P_-\left(\rho^n_-\right). \end{cases}$$

# Homogénéisation

On considère des données initiales telles que

$$\rho^n_{+,0}\rho^n_{-,0} = 0.$$

On considère une suite $\left(\rho^n_{\pm}, u^n\right)$ déterminée par

$$\begin{cases} \partial_t \rho^n_{\pm} + \operatorname{div}\left(\rho^n_{\pm} u\right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho^n u^n\right) + \operatorname{div}\left(\rho^n u^n \otimes u^n\right) + \nabla p^n = \mu \Delta u^n + \left(\mu + \lambda\right) \nabla \operatorname{div} u^n, \\ p^n = P_+\left(\rho^n_+\right) + P_-\left(\rho^n_-\right). \end{cases}$$

Il faut étudier séparement les familles de mesures de Young associées aux suites $\left(\rho^n_+, \rho^n_-\right)$ : $\left(\Xi_+, \Xi_-\right)$

$$\begin{aligned} &\left(\rho^n b'\left(\rho^n\right) - b\left(\rho^n\right)\right)\left(\operatorname{div} u^n - P_+\left(\rho^n_+\right) - P_-\left(\rho^n_-\right)\right) \\ &= \left(\rho^n b'\left(\rho^n\right) - b\left(\rho^n\right)\right)\left(\operatorname{div} u^n - P_+\left(\rho^n_+\right)\right) \\ &- \left(\rho^n b'\left(\rho^n\right) - b\left(\rho^n\right)\right) P_-\left(\rho^n_-\right) \\ &= \left(\rho^n b'\left(\rho^n\right) - b\left(\rho^n\right)\right)\left(\operatorname{div} u^n - P_+\left(\rho^n_+\right)\right) + b\left(0\right) P_-\left(\rho^n_-\right). \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on retrouve le système :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_\pm + u \nabla \alpha_\pm = \frac{1}{2\mu+\lambda} \alpha_+ \alpha_- \left( P_\pm(\rho_\pm) - P_\mp(\rho_\mp) \right), \\ \partial_t(\alpha_\pm \rho_\pm) + \operatorname{div}\left(\alpha_\pm \rho_\pm u\right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho u\right) + \operatorname{div}\left(\rho u \otimes u\right) + \nabla\left(\alpha_+ P_+(\rho_+) + \alpha_- P_-(\rho_-)\right) = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u. \end{cases} \tag{$HNSC_2$}$$

Merci pour votre attention!