



Analyse numérique avec estimation d'erreur pour l'équation de Korteweg-de Vries et le système $abcd$

Cosmin Burtea¹, Clémentine Courtès², Frédéric Lagoutière¹, Frédéric Rousset³

Journées Jeunes EDPistes 2018,
Nancy, le 23 mars 2018

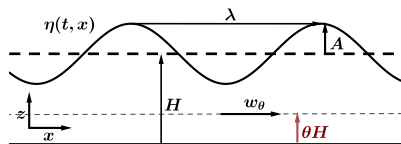
¹ICJ, Université Lyon 1,

²IRMA, Université de Strasbourg,  ³LMO, Université Paris-Sud 

Introduction : modélisation des vagues de faible amplitude

Modélisation

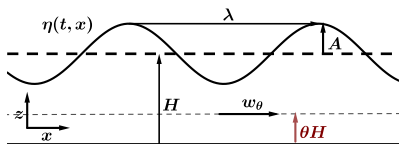
- ▶ Fluide incompressible, irrotationnel
- ▶ Surface libre : η avec $A = \max_{t,x} \eta(t,x)$
- ▶ Hauteur de l'eau au repos : H
- ▶ w_θ vitesse du fluide à la hauteur θH pour $0 \leq \theta \leq 1$



Introduction : modélisation des vagues de faible amplitude

Modélisation

- ▶ Fluide incompressible, irrotationnel
- ▶ Surface libre : η avec $A = \max_{t,x} \eta(t,x)$
- ▶ Hauteur de l'eau au repos : H
- ▶ w_θ vitesse du fluide à la hauteur θH pour $0 \leq \theta \leq 1$



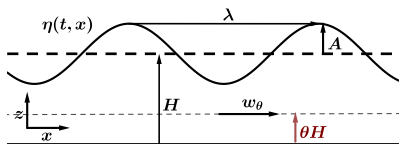
Hypothèses des faibles amplitudes en eau peu profonde

- Paramètre de faible non linéarité $\epsilon = A/H \ll 1$
- Paramètre de faible profondeur $\mu = H^2/\lambda^2 \ll 1$
- Hypothèse de Boussinesq $\epsilon \approx \mu$

Introduction : modélisation des vagues de faible amplitude

Modélisation

- ▶ Fluide incompressible, irrotationnel
- ▶ Surface libre : η avec $A = \max_{t,x} \eta(t,x)$
- ▶ Hauteur de l'eau au repos : H
- ▶ w_θ vitesse du fluide à la hauteur θH pour $0 \leq \theta \leq 1$



Hypothèses des faibles amplitudes en eau peu profonde

$$\epsilon = A/H \ll 1 \quad \mu = H^2/\lambda^2 \ll 1 \quad \epsilon \approx \mu$$

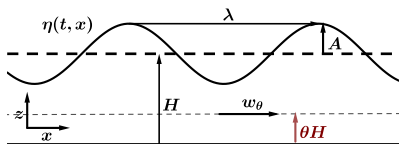
En négligeant les termes en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ [Bona, Chen, Saut '02] obtiennent le **système *abcd***

$$\begin{cases} \partial_t \eta - \mu b_\theta \partial_x^2 \partial_t \eta + \partial_x w_\theta + a_\theta \mu \partial_x^3 w_\theta + \epsilon \partial_x (\eta w_\theta) = 0, \\ \partial_t w_\theta - \mu d_\theta \partial_x^2 \partial_t w_\theta + \partial_x \eta + c_\theta \mu \partial_x^3 \eta + \epsilon \partial_x \left(\frac{w_\theta^2}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } a_\theta + b_\theta + c_\theta + d_\theta = \frac{1}{3}.$$

Introduction : modélisation des vagues de faible amplitude

Modélisation

- ▶ Fluide incompressible, irrotationnel
- ▶ Surface libre : η avec $A = \max_{t,x} \eta(t,x)$
- ▶ Hauteur de l'eau au repos : H
- ▶ w_θ vitesse du fluide à la hauteur θH pour $0 \leq \theta \leq 1$



Hypothèses des faibles amplitudes en eau peu profonde

$$\epsilon = A/H \ll 1 \quad \mu = H^2/\lambda^2 \ll 1 \quad \epsilon \approx \mu$$

En négligeant les termes en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ [Bona, Chen, Saut '02] obtiennent le **système *abcd***

$$\begin{cases} \partial_t \eta - \mu b_\theta \partial_x^2 \partial_t \eta + \partial_x w_\theta + a_\theta \mu \partial_x^3 w_\theta + \epsilon \partial_x (\eta w_\theta) = 0, \\ \partial_t w_\theta - \mu d_\theta \partial_x^2 \partial_t w_\theta + \partial_x \eta + c_\theta \mu \partial_x^3 \eta + \epsilon \partial_x \left(\frac{w_\theta^2}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } a_\theta + b_\theta + c_\theta + d_\theta = \frac{1}{3}.$$

[Lannes '13] En supposant la propagation unilatérale, nous pouvons déduire du système *abcd* l'équation de **Korteweg-de Vries**

$$\partial_t u + \epsilon \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) + \mu \partial_x^3 u = 0.$$

Sommaire

- 1 Équation de KdV : non linéarité et dispersion
- 2 Ordre de convergence pour l'équation de KdV
- 3 Analyse numérique du système $abcd$

- 1 Équation de KdV : non linéarité et dispersion
 - Problème de Cauchy et régularité
 - Schéma numérique utilisé
- 2 Ordre de convergence pour l'équation de KdV
- 3 Analyse numérique du système $abcd$

1. Problème de Cauchy et régularité

Nous considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) + \partial_x^3 u = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{KdV})$$

1. Problème de Cauchy et régularité

Nous considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) + \partial_x^3 u = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{KdV})$$

Théorème ([Bourgain '93], [Kenig, Ponce, Vega '93])

- Soit $s \geq 0$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, alors il existe une **unique solution globale** u telle que pour tout $T \geq 0$, $u \in \mathcal{C}([0, T], H^s)$.
- De plus, il existe $\kappa_s > 0$ et $C_s > 0$, tels que, pour tout $T \geq 0$
 - ▶ $\sup_{[0, T]} \|u(t)\|_{H^s} \leq C_s e^{\kappa_s T} \|u_0\|_{H^s}$,
 - ▶ $\|\partial_x u\|_{L^4([0, T], L^\infty(\mathbb{R}))} \leq C_{3/4} e^{\kappa_{3/4} T} \|u_0\|_{H^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R})}$, si $s \geq \frac{3}{4}$.

Remarque : En terme de régularité de u_0 , ce n'est pas le meilleur résultat qui existe mais c'est celui qui assure une majoration de la solution dans $L^4([0, T], W^{1, \infty}(\mathbb{R}))$. (Par exemple [Colliander et al. '03] ont prouvé l'existence globale dans $\mathcal{C}([0, T], H^s(\mathbb{R}))$ pour $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s > -3/4$).

- 1 Équation de KdV : non linéarité et dispersion
 - Problème de Cauchy et régularité
 - Schéma numérique utilisé
- 2 Ordre de convergence pour l'équation de KdV
- 3 Analyse numérique du système $abcd$

2. Schéma numérique utilisé

État de l'art : convergence pour l'équation de KdV

● Schémas aux différences finies :

- ▶ [Zabusky, Kruskal '65] : stabilité formelle,
- ▶ [Vliegenthart '71] : justification rigoureuse de la condition de stabilité (sans estimation de convergence),
- ▶ [Winther '80] : estimations d'énergie (pour une donnée très régulière),
- ▶ [Holden, Koley, Risebro '15] : convergence sous condition de Courant-Friedrichs-Lewy forte (par la suite, condition CFL), sans estimation d'ordre de convergence.

● Autres méthodes numériques :

- ▶ Schémas symplectiques basés sur des différences finies compactes [Kanazawa, Matsuo, Yaguchi '12] ...
- ▶ Schémas de splitting [Holden, Karlsen, Risebro, Tao '11], [Holden, Lubich, Risebro, '13] ...
- ▶ Méthodes spectrales [Nouri, Sloan '89] ...
- ▶ Éléments finis/méthode de Galerkin [Bona, Chen, Karakashian, Xing '13] ...

2. Schéma numérique utilisé

Notations : Schéma numérique

- **Opérateurs discrets :**

$$D_-(v)_j^n = \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad D_+(v)_j^n = \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x}, \quad D_c(v)_j^n = \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x}.$$

$$D_+D_-(v)_j^n = \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \quad D_+D_+D_-(v)_j^n = \frac{v_{j+2}^n - 3v_{j+1}^n + 3v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x^3}.$$

- **Schéma numérique :**

2. Schéma numérique utilisé

Notations : Erreur de convergence

- **Objectif** : Étudier le **taux de convergence** du schéma aux différences finies
- **Définition** : L'**erreur de convergence** est définie par : $\forall (n, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket \times \mathbb{Z}$, avec $N = \lfloor \frac{T}{\Delta t} \rfloor$

$$e_j^n = v_j^n - \bar{u}(t^n, x_j),$$

$$\text{où } \bar{u}(t, x) = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(s, y) dy ds.$$

- **Espace fonctionnel discret** : Nous étudions la convergence dans l'espace discret $\ell^\infty(\llbracket 0, N \rrbracket, \ell_\Delta^2(\mathbb{Z}))$, dont la norme est

$$\|e\|_{\ell^\infty \ell_\Delta^2} = \sup_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \|e^n\|_{\ell_\Delta^2} = \sup_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \sqrt{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta x |e_j^n|^2}.$$

- **Définition** : Le **taux de convergence** est le réel α tel que $\|e\|_{\ell^\infty \ell_\Delta^2} \leq C \Delta x^\alpha$.

- 1 Équation de KdV : non linéarité et dispersion
- 2 **Ordre de convergence pour l'équation de KdV**
 - Convergence pour $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq \frac{3}{4}$
 - Preuve : les grandes étapes
- 3 Analyse numérique du système *abcd*

1. Convergence pour $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq \frac{3}{4}$

Théorème ([C., Lagoutière, Rousset])

Pour tout $T > 0$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{3}{4}$, choisissons τ tel que $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \tau$.

Soit $\beta_0 \in]0, 1[$ et $\theta \in [0, 1]$, il existe $\omega_0 > 0$ tel que, pour tout Δt et $\Delta x \leq \omega_0$ tels que

$$\begin{cases} 4(1 - 2\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^3} \leq 1 - \beta_0 & \text{si } \theta < \frac{1}{2}, \quad (\text{CFL dispersive}), \\ \left[\tau + \frac{1}{2} \right] \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 - \beta_0 & \text{si } \theta \geq \frac{1}{2}, \quad (\text{CFL hyperbolique}), \end{cases}$$

alors, l'erreur de convergence est majorée par

- si $s \geq 6$

$$\sup_{n \in [0, N]} \|e^n\|_{\ell^2_\Delta} \leq C(T, \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \Delta x,$$

- si $3 \leq s \leq 6$

$$\sup_{n \in [0, N]} \|e^n\|_{\ell^2_\Delta} \leq C(T, \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \Delta x^{\frac{s}{6}},$$

- si $\frac{3}{4} \leq s < 3$

$$\sup_{n \in [0, N]} \|e^n\|_{\ell^2_\Delta} \leq C(T, \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \Delta x^{\frac{s}{12-2s}}.$$

Ordre de convergence en fonction de la régularité de Sobolev

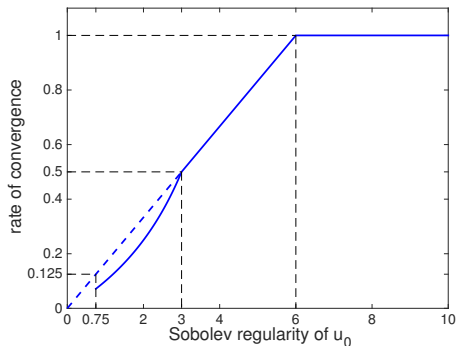


Figure: Ordre de convergence en fonction de la régularité de la donnée initiale

Résultats numériques

- **Paramètres :**

- ▶ Schéma implicite $\theta = 1$, (condition CFL de type hyperbolique),
- ▶ Une donnée initiale périodique sur $[0, L]$ avec $L = 50$ et $T = 0.1$,
- ▶ Nombre de mailles en espace $J \in [1600, 3200, 6400, 12800, 25600, 51200]$.

- **Calcul de l'erreur numérique :**

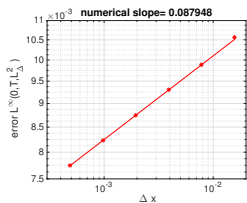
$$r = \frac{\log(E_J) - \log(E_{2J})}{\log(2)},$$

où E_J correspond à l'erreur $\ell^\infty([0, N], \ell_\Delta^2(\mathbb{Z}))$ entre la solution calculée avec J mailles en espace et la solution exacte.

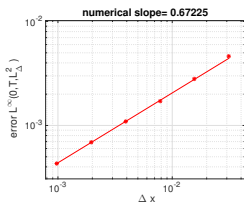
calculée avec $2J$ mailles en espace.

Résultats numériques : $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $0 \leq s$

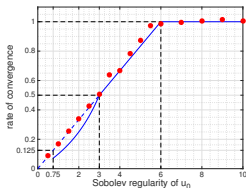
Fonction dans $H^s(\mathbb{R})$ avec $s < \frac{1}{2}$ (fonction indicatrice)		Fonction dans $H^4(\mathbb{R})$	
erreur $\ell^\infty(0, T, \ell_\Delta^2(\mathbb{Z}))$	ordre numérique	erreur $\ell^\infty(0, T, \ell_\Delta^2(\mathbb{Z}))$	ordre numérique
$1,0567 \cdot 10^{-2}$		$4,6454 \cdot 10^{-3}$	
$9,8843 \cdot 10^{-3}$	0.0964	$2,8109 \cdot 10^{-3}$	0.72476
$9,2992 \cdot 10^{-3}$	0.0880	$1,7147 \cdot 10^{-3}$	0.71307
$8,7490 \cdot 10^{-3}$	0.0879	$1,0892 \cdot 10^{-3}$	0.65474
$8,2289 \cdot 10^{-3}$	0.0885	$6,8793 \cdot 10^{-4}$	0.66290
$7,7468 \cdot 10^{-3}$	0.0871	$4,3185 \cdot 10^{-4}$	0.67172



Ordre conjecturé : 0.0833



Ordre théorique : 0.6667



Ordre en fonction de la régularité

- 1 Équation de KdV : non linéarité et dispersion
- 2 **Ordre de convergence pour l'équation de KdV**
 - Convergence pour $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq \frac{3}{4}$
 - Preuve : les grandes étapes
- 3 Analyse numérique du système $abcd$

2. Preuve : les grandes étapes : $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq 6$

$$\mathcal{A}_\theta = I + \theta \Delta t D_+ D_+ D_-$$

- Étape 1 Équation vérifiée par l'erreur numérique :

$$\mathcal{A}_\theta e_j^{n+1} = \mathcal{A}_{-(1-\theta)} e_j^n - \Delta t D_c \left(\frac{e^2}{2} \right)_j^n - \Delta t D_c (\bar{u} e)_j^n + \frac{\tau \Delta x \Delta t}{2} D_+ D_- (e)_j^n - \Delta t \epsilon_j^n$$

- Étape 2 Consistance :
- Étape 3 Stabilité :

2. Preuve : les grandes étapes : $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq 6$

$$\mathcal{A}_\theta = I + \theta \Delta t D_+ D_+ D_-$$

- **Étape 1 Équation vérifiée par l'erreur numérique :**

$$\mathcal{A}_\theta e_j^{n+1} = \mathcal{A}_{-(1-\theta)} e_j^n - \Delta t D_c \left(\frac{e^2}{2} \right)_j^n - \Delta t D_c (\bar{u} e)_j^n + \frac{\tau \Delta x \Delta t}{2} D_+ D_- (e)_j^n - \Delta t \epsilon_j^n$$

- **Étape 2 Consistance :** Par des DL de Taylor : $\|\epsilon^n\|_{\ell^\infty \ell_\Delta^2} \leq C_C(T, \|u_0\|_{H^6}) \Delta x$
Si besoin on régularise u_0 par produit de convolution avec une suite régularisante.
- **Étape 3 Stabilité :**

2. Preuve : les grandes étapes : $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq 6$

$$\mathcal{A}_\theta = I + \theta \Delta t D_+ D_+ D_-$$

- **Étape 1 Équation vérifiée par l'erreur numérique :**

$$\mathcal{A}_\theta e_j^{n+1} = \mathcal{A}_{-(1-\theta)} e_j^n - \Delta t D_c \left(\frac{e^2}{2} \right)_j^n - \Delta t D_c (\bar{u} e)_j^n + \frac{\tau \Delta x \Delta t}{2} D_+ D_- (e)_j^n - \Delta t \epsilon_j^n$$

- **Étape 2 Consistance :** Par des DL de Taylor : $\|\epsilon^n\|_{\ell^\infty \ell_\Delta^2} \leq C_C(T, \|u_0\|_{H^6}) \Delta x$
Si besoin on régularise u_0 par produit de convolution avec une suite régularisante.
- **Étape 3 Stabilité :** Se ramener à une inégalité de type fort-faible discrète

3. Preuve : les grandes étapes : $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq 6$

Inégalité de type fort-faible

Unicité fort-faible [Dafermos '79, DiPerna '79]

$$\forall t \in [0, T], \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\|\partial_x \tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

- avec • u : une solution entropique faible
 • \tilde{u} : la solution régulière forte

But : obtenir une version discrète

$$\|v^{n+1} - \bar{u}^{n+1}\|_{\ell^2_\Delta}^2 = \|e^{n+1}\|_{\ell^2_\Delta}^2 \leq C(\|D_+(\bar{u})^n\|_{\ell^\infty}) \|e^n\|_{\ell^2_\Delta}^2 + \Delta t^2 \|\epsilon^n\|_{\ell^2_\Delta}^2,$$

- avec • u : remplacée par $(v_j^n)_{(n,j)}$
 • \tilde{u} : remplacée par \bar{u}

[Cancès, Mathis, Seguin '12]

► **Preuve (cas continu)** : Soit (η, g) un couple entropie/flux d'entropie, on définit l'**entropie relative** $\eta(\cdot|\cdot)$ et le **flux d'entropie relative** $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$ par

$$\eta(u|\tilde{u}) = \eta(u) - \eta(\tilde{u}) - \nabla_u \eta(\tilde{u})(u - \tilde{u}), \quad \left| \mathcal{G}(u, \tilde{u}) = g(u) - g(\tilde{u}) - \nabla_u \eta(\tilde{u})(f(u) - f(\tilde{u})). \right.$$

Dans le cas de l'équation de Burgers, $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

► **Par exemple**, $\eta_0(u) = u^2 \Rightarrow \eta_0(u|\tilde{u}) = (u - \tilde{u})^2$

2. Preuve : les grandes étapes : $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq 6$

$$\mathcal{A}_\theta = I + \theta \Delta t D_+ D_+ D_-$$

- **Étape 1 Équation vérifiée par l'erreur numérique :**

$$\mathcal{A}_\theta e_j^{n+1} = \mathcal{A}_{-(1-\theta)} e_j^n - \Delta t D_c \left(\frac{e^2}{2} \right)_j^n - \Delta t D_c (\bar{u} e)_j^n + \frac{\tau \Delta x \Delta t}{2} D_+ D_- (e)_j^n - \Delta t \epsilon_j^n$$

- **Étape 2 Consistance :** Par des DL de Taylor : $\| \epsilon^n \|_{\ell^\infty \ell_\Delta^2} \leq C_C(T, \|u_0\|_{H^6}) \Delta x$
Si besoin on régularise u_0 par produit de convolution avec une suite régularisante.
- **Étape 3 Stabilité :** Se ramener à une inégalité de type fort-faible discrète.



2. Preuve : les grandes étapes : $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq 6$

$$\mathcal{A}_\theta = I + \theta \Delta t D_+ D_+ D_-$$

- **Étape 1 Équation vérifiée par l'erreur numérique :**

$$\mathcal{A}_\theta e_j^{n+1} = \mathcal{A}_{-(1-\theta)} e_j^n - \Delta t D_c \left(\frac{e^2}{2} \right)_j^n - \Delta t D_c (\bar{u} e)_j^n + \frac{\tau \Delta x \Delta t}{2} D_+ D_- (e)_j^n - \Delta t \epsilon_j^n$$

- **Étape 2 Consistance :** Par des DL de Taylor : $\|\epsilon^n\|_{\ell^\infty \ell_\Delta^2} \leq C_C(T, \|u_0\|_{H^6}) \Delta x$

Si besoin on régularise u_0 par produit de convolution avec une suite régularisante.

- **Étape 3 Stabilité :** Se ramener à une inégalité de type fort-faible discrète.

Par des intégrations par parties discrètes on obtient (contrôle des termes résiduels grâce aux conditions CFL et à la condition sur τ)

$$\|\mathcal{A}_\theta e^{n+1}\|_{\ell_\Delta^2}^2 \leq \|\mathcal{A}_\theta e^n\|_{\ell_\Delta^2}^2 \left(1 + \Delta t \|e^n\|_{\ell^\infty} + \Delta t \|D_+(\bar{u})^n\|_{\ell^\infty} \right) + \Delta t^2 \|\epsilon^n\|_{\ell_\Delta^2}^2$$

Hypothèse de récurrence : $\|e^n\|_{\ell^\infty} \leq \Delta x^{\frac{1}{2}-\gamma}$. D'après le lemme de Grönwall, on a

$$\|e^{n+1}\|_{\ell_\Delta^2}^2 \leq \exp \left(T + \int_0^T \|\partial_x u(s, \cdot)\|_{L^\infty} ds \right) T \sup_{p \in \llbracket 0, n \rrbracket} \|e^p\|_{\ell_\Delta^2}^2$$

- ▶ L'intégrale $\int_0^T \|\partial_x u(s, \cdot)\|_{L^\infty} ds$ est contrôlée par $u_0 \in H^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R})$.
- ▶ Il faut vérifier que $\|e^{n+1}\|_{\ell^\infty} \leq \Delta x^{\frac{1}{2}-\gamma}$ pour finir le raisonnement par récurrence, c'est à cette étape que nous devons distinguer les cas $\frac{3}{4} \leq s < 3$ et $3 \leq s \leq 6$.

- 1 Équation de KdV : non linéarité et dispersion
- 2 Ordre de convergence pour l'équation de KdV
- 3 **Analyse numérique du système *abcd***
 - Le système continu : le problème de Cauchy
 - Convergence du schéma numérique

1. Le système continu : le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t \eta - b \partial_x^2 \partial_t \eta + \partial_x w + a \partial_x^3 w + \partial_x(\eta w) = 0, \\ \partial_t w - d \partial_x^2 \partial_t w + \partial_x \eta + c \partial_x^3 \eta + \partial_x \left(\frac{w^2}{2} \right) = 0, \\ (\eta, w)|_{t=0}(x) = (\eta_0, w_0)(x), \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \quad (\text{abcd})$$

avec $a + b + c + d = \frac{1}{3}$.

1. Le système continu : le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t \eta - b \partial_x^2 \partial_t \eta + \partial_x w + a \partial_x^3 w + \partial_x(\eta w) = 0, \\ \partial_t w - d \partial_x^2 \partial_t w + \partial_x \eta + c \partial_x^3 \eta + \partial_x \left(\frac{w^2}{2} \right) = 0, & \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ (\eta, w)|_{t=0}(x) = (\eta_0, w_0)(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (abcd)$$

avec $a + b + c + d = \frac{1}{3}$.

Théorème ([Bona, Chen, Saut, '02], [Linares, Pilod, Saut '12])

Le système $abcd$ est **linéairement bien posé** dans les deux cas suivants : si $a \leq 0, c \leq 0, b \geq 0, d \geq 0$ ou $a = c > 0, b \geq 0, d \geq 0$.

1. Le système continu : le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t \eta - b \partial_x^2 \partial_t \eta + \partial_x w + a \partial_x^3 w + \partial_x (\eta w) = 0, \\ \partial_t w - d \partial_x^2 \partial_t w + \partial_x \eta + c \partial_x^3 \eta + \partial_x \left(\frac{w^2}{2} \right) = 0, & \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ (\eta, w)|_{t=0}(x) = (\eta_0, w_0)(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (abcd)$$

Théorème ([Burtea, '16])

- Si $(\eta_0, w_0) \in H^{s_1} \times H^{s_2}(\mathbb{R})$ et si $a \leq 0, c \leq 0, b \geq 0, d \geq 0$ (en excluant certains cas), alors il existe un temps $T = T(\eta_0, w_0)$ et une **unique solution** $(\eta, w) \in \mathcal{C}([0, T], H^{s_1} \times H^{s_2}(\mathbb{R}))$ au problème de Cauchy (abcd).
- De plus, l'énergie \mathcal{E} suivante est conservée : il existe F telle que

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}(\eta(t), w(t)) \leq F(\mathcal{E}(\eta_0, w_0))$$

$$\text{où } [\mathcal{E}(\eta, w)]^2 = \|\eta\|_{L^2}^2 + (b - c) \|\partial_x \eta\|_{L^2}^2 + (-c)b \|\partial_x^2 \eta\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2 + (d - a) \|\partial_x w\|_{L^2}^2 + (-a)d \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2.$$

Remarque : [Existence en temps long] Plus précisément, il est démontré dans [Burtea, '16] que si les termes **dispersifs** et **non linéaires** sont d'ordre ϵ dans le système (abcd) alors le temps T (temps d'existence des solutions) est d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$.

- 1 Équation de KdV : non linéarité et dispersion
- 2 Ordre de convergence pour l'équation de KdV
- 3 **Analyse numérique du système *abcd***
 - Le système continu : le problème de Cauchy
 - Convergence du schéma numérique

2. Convergence du schéma numérique

On appelle e_j^n et f_j^n les deux erreurs de convergence suivantes

$$e_j^n = \eta_j^n - \bar{\eta}(t^n, x_j) \text{ et } f_j^n = w_j^n - \bar{w}(t^n, x_j), \text{ pour tout } (n, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket \times \mathbb{R}.$$

Théorème ([Burtea, C.]

$$bd \neq 0$$

Pour tout $(\eta_0, w_0) \in H^{s_1}(\mathbb{R}) \times H^{s_2}(\mathbb{R})$, et pour tout $T > 0$ tel que

$(\eta, w) \in \mathcal{C}(\llbracket 0, T \rrbracket, H^{s_1} \times H^{s_2})$ soit la solution sur $[0, T]$ du système $abcd$ avec

$$s > 7.$$

Il existe $\omega_0 > 0$ tel que pour tout $\Delta t \leq \omega_0$ et $\Delta x \leq \omega_0$

alors le schéma numérique vérifie

$$\sup_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{E}_{\text{discret}}(e^n, f^n) \leq C_{abcd}(\Delta t + \Delta x^2)$$

$$\text{où } [\mathcal{E}_{\text{discret}}(e^n, f^n)]^2 = \|e^n\|_{\ell_{\Delta}^2}^2 + (b-c)\|D_+ e^n\|_{\ell_{\Delta}^2}^2 + b(-c)\|D_+ D_- e^n\|_{\ell_{\Delta}^2}^2 + \|f^n\|_{\ell_{\Delta}^2}^2 + (d-a)\|D_+ f^n\|_{\ell_{\Delta}^2}^2 + d(-a)\|D_+ D_- f^n\|_{\ell_{\Delta}^2}^2.$$

$$bd = 0 \text{ (en excluant 5 cas dont } b = d = 0)$$

Choisissons τ_1 et τ_2 tels que

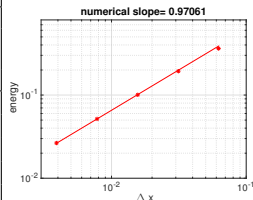
$$\sup_{t \in [0, T]} \|w(t, \cdot)\|_{L^\infty} < \min(\tau_1, \tau_2).$$

tels que

$$\max[(1 - \text{sgn}b)\tau_1, (1 - \text{sgn}d)\tau_2] \Delta t \leq \Delta x$$

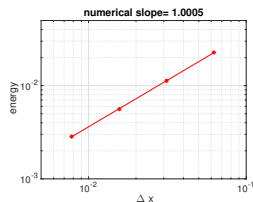
Illustrations numériques

Cas $a = -\frac{1}{6}, b = 0, c = 0, d = \frac{1}{2}$			
J	Δx	énergie $\sup_{n \in [0, N]} \mathcal{E}_{\text{discret}}(e^n, f^n)$	ordre numérique
640	$6,2500 \cdot 10^{-2}$	$3,6218 \cdot 10^{-1}$	
1280	$3,1250 \cdot 10^{-2}$	$1,9282 \cdot 10^{-1}$	0,9316
2560	$1,5625 \cdot 10^{-2}$	$1,0036 \cdot 10^{-1}$	0,9478
5120	$7,8125 \cdot 10^{-3}$	$5,1627 \cdot 10^{-2}$	0,9578
10240	$3,9063 \cdot 10^{-3}$	$2,6345 \cdot 10^{-2}$	0,9672



Ordre théorique : 1

Cas $a = -\frac{7}{30}, b = \frac{7}{15}, c = -\frac{2}{5}, d = \frac{1}{2}$			
J	Δx	énergie $\sup_{n \in [0, N]} \mathcal{E}_{\text{discret}}(e^n, f^n)$	ordre numérique
640	$6,2500 \cdot 10^{-2}$	$2,2786 \cdot 10^{-2}$	
1280	$3,1250 \cdot 10^{-2}$	$1,1261 \cdot 10^{-2}$	1,0169
2560	$1,5625 \cdot 10^{-2}$	$5,6130 \cdot 10^{-3}$	1,0043
5120	$7,8125 \cdot 10^{-3}$	$2,8479 \cdot 10^{-3}$	0,9789



Ordre théorique : 1

Conclusion et perspectives

• Conclusion

- ▶ Nous avons trouvé une méthode pour étudier à la fois le terme non linéaire et le terme dispersif de KdV et du système $abcd$.
- ▶ Nous avons quantifié l'ordre de convergence par rapport à la régularité de Sobolev de la donnée initiale dans le cas de l'équation de KdV.

• Perspectives

- ▶ Déterminer un schéma numérique pour un système $abcd$ avec des termes **non linéaires et dispersifs d'ordre ϵ** et étudier sa convergence.
[La difficulté serait alors de trouver des majorations uniformes en ϵ , pour ne pas avoir un ordre de convergence en $\frac{\Delta x}{\epsilon}$].

Merci pour votre attention