Dynamique globale de l'équation des ondes critiques

Thomas Duyckaerts[1] (avec H. Jia, C. Kenig et F. Merle)

[1]LAGA, Université Paris 13 et IUF

Nancy
Journée jeunes EDPistes Français
16 Mars 2018

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Outline

Equation des ondes focalisante critique

$$\text{(NLW)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}} u, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

où $\vec{u} = (u, \partial_t u)$.

Equation des ondes focalisante critique

(NLW) $$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}} u, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

où $\vec{u} = (u, \partial_t u)$.
L'équation est localement bien posée dans $\mathcal{H} = \dot{H}^1 \times L^2$ [Ginibre et Velo, 90's] : existence d'une solution u définie sur un intervalle maximal d'existence $(T_-(u), T_+(u))$.

L'énergie

$$E(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x u(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u(t)|^2 - \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |u(t)|^{\frac{2N}{N-2}}$$

est conservée.

Equation des ondes focalisante critique

(NLW) $$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}} u, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

où $\vec{u} = (u, \partial_t u)$.

L'équation est localement bien posée dans $\mathcal{H} = \dot{H}^1 \times L^2$ [Ginibre et Velo, 90's] : existence d'une solution u définie sur un intervalle maximal d'existence $(T_-(u), T_+(u))$.

L'énergie

$$E(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x u(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u(t)|^2 - \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |u(t)|^{\frac{2N}{N-2}}$$

est conservée.

$\|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \lesssim E(u)$ n'est vrai que pour des petites données !

Equation des ondes focalisante critique

$$\text{(NLW)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}} u, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

où $\vec{u} = (u, \partial_t u)$.
L'équation est localement bien posée dans $\mathcal{H} = \dot{H}^1 \times L^2$ [Ginibre et Velo, 90's] : existence d'une solution u définie sur un intervalle maximal d'existence $(T_-(u), T_+(u))$.

L'énergie

$$E(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x u(t)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u(t)|^2 - \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t)|^{\frac{2N}{N-2}}$$

est conservée.

$\|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \lesssim E(u)$ n'est vrai que pour des petites données !

Transformations de l'équation

Si u est une solution, $\lambda > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $R \in \mathcal{O}_N(\mathbb{R})$, $\iota_0, \iota_1 \in \{\pm 1\}$, alors

$$v(t,x) = \frac{\iota_0}{\lambda^{\frac{N}{2}-1}} u\left(\frac{\iota_1 t}{\lambda}, \frac{R(x-x_0)}{\lambda}\right)$$

est aussi solution. De plus :

Transformations de l'équation

Si u est une solution, $\lambda > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $R \in \mathcal{O}_N(\mathbb{R})$, $\iota_0, \iota_1 \in \{\pm 1\}$, alors

$$v(t,x) = \frac{\iota_0}{\lambda^{\frac{N}{2}-1}} u\left(\frac{\iota_1 t}{\lambda}, \frac{R(x-x_0)}{\lambda}\right)$$

est aussi solution. De plus :

$$E(\vec{u}) = E(\vec{v}), \quad \|\vec{v}(0)\|_{\mathcal{H}} = \|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}}, \quad T_+(v) = \lambda T_+(u).$$

Transformations de l'équation

Si u est une solution, $\lambda > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $R \in \mathcal{O}_N(\mathbb{R})$, $\iota_0, \iota_1 \in \{\pm 1\}$, alors

$$v(t,x) = \frac{\iota_0}{\lambda^{\frac{N}{2}-1}} u\left(\frac{\iota_1 t}{\lambda}, \frac{R(x-x_0)}{\lambda}\right)$$

est aussi solution. De plus :

$$E(\vec{u}) = E(\vec{v}), \quad \|\vec{v}(0)\|_{\mathcal{H}} = \|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}}, \quad T_+(v) = \lambda T_+(u).$$

Si $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ et $p = |\mathbf{p}| < 1$,

$$u_{\mathbf{p}}(t,x)$$
$$= u\left(\frac{t - \mathbf{p}\cdot x}{\sqrt{1-|\mathbf{p}|^2}}, \left(-\frac{t}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - 1\right)\mathbf{p}\cdot x\right)\mathbf{p} + x\right)$$

est aussi solution (transformée de Lorentz de u).

Outline

Explosions EDO et de Type I

Les solutions de $y'' = |y|^{\frac{4}{N-2}} y$ explosent toutes en temps fini sauf $y = 0$ et $\pm y_T(t)$ où

$$y_T(t) = \left(\frac{N(N-2)}{4}\right)^{\frac{N-2}{4}} \frac{1}{(T-t)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Explosions EDO et de Type I

Les solutions de $y'' = |y|^{\frac{4}{N-2}} y$ explosent toutes en temps fini sauf $y = 0$ et $\pm y_T(t)$ où

$$y_T(t) = \left(\frac{N(N-2)}{4}\right)^{\frac{N-2}{4}} \frac{1}{(T-t)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Par vitesse finie de propagation, constructions de solutions t.q.

$$\lim_{t \to T_+(u)} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty.$$

(Explosion de type I)

- Indications numériques que les solutions explosives génériques se comportent comme $y_{T_+}(t)$ quand $t \to T_+$: [Bizoń Chmaj Tabor 04].

Explosions EDO et de Type I

Les solutions de $y'' = |y|^{\frac{4}{N-2}} y$ explosent toutes en temps fini sauf $y = 0$ et $\pm y_T(t)$ où

$$y_T(t) = \left(\frac{N(N-2)}{4}\right)^{\frac{N-2}{4}} \frac{1}{(T-t)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Par vitesse finie de propagation, constructions de solutions t.q.

$$\lim_{t \to T_+(u)} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty.$$

(Explosion de type I)

- Indications numériques que les solutions explosives génériques se comportent comme $y_{T_+}(t)$ quand $t \to T_+$: [Bizoń Chmaj Tabor 04].
- Stabilité (locale) de y_T dans les cônes d'onde : [Donninger 2015] (résultat précédent de [Donninger Schörkhuber]).

Explosions EDO et de Type I

Les solutions de $y'' = |y|^{\frac{4}{N-2}} y$ explosent toutes en temps fini sauf $y = 0$ et $\pm y_T(t)$ où

$$y_T(t) = \left(\frac{N(N-2)}{4}\right)^{\frac{N-2}{4}} \frac{1}{(T-t)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Par vitesse finie de propagation, constructions de solutions t.q.

$$\lim_{t \to T_+(u)} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty.$$

(Explosion de type I)

- Indications numériques que les solutions explosives génériques se comportent comme $y_{T_+}(t)$ quand $t \to T_+$: [Bizoń Chmaj Tabor 04].
- Stabilité (locale) de y_T dans les cônes d'onde : [Donninger 2015] (résultat précédent de [Donninger Schörkhuber]).
- Pas de classification ni de résultat de stabilité général (voir [Merle Zaag]).

Explosions EDO et de Type I

Les solutions de $y'' = |y|^{\frac{4}{N-2}} y$ explosent toutes en temps fini sauf $y = 0$ et $\pm y_T(t)$ où

$$y_T(t) = \left(\frac{N(N-2)}{4}\right)^{\frac{N-2}{4}} \frac{1}{(T-t)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Par vitesse finie de propagation, constructions de solutions t.q.

$$\lim_{t \to T_+(u)} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty.$$

(Explosion de type I)

- Indications numériques que les solutions explosives génériques se comportent comme $y_{T_+}(t)$ quand $t \to T_+$: [Bizoń Chmaj Tabor 04].
- Stabilité (locale) de y_T dans les cônes d'onde : [Donninger 2015] (résultat précédent de [Donninger Schörkhuber]).
- Pas de classification ni de résultat de stabilité général (voir [Merle Zaag]).

Solutions stationnaires

Solutions stationnaires :

$$-\Delta Q = |Q|^{\frac{4}{N-2}} Q, \quad Q \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N).$$

"Unique" solution radiale (état fondamental) :

$$W = \frac{1}{\left(1 + \frac{|x|^2}{N(N-2)}\right)^{\frac{N}{2}-1}}.$$

Solutions stationnaires

Solutions stationnaires :

$$-\Delta Q = |Q|^{\frac{4}{N-2}} Q, \quad Q \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N).$$

"Unique" solution radiale (état fondamental) :

$$W = \frac{1}{\left(1 + \frac{|x|^2}{N(N-2)}\right)^{\frac{N}{2}-1}}.$$

Existence de solutions d'énergie arbitrairement grande : [W.Y. Ding 1986], [Del Pino, Musso, Pacard, Pistoia 2013].

Solutions stationnaires

Solutions stationnaires :

$$-\Delta Q = |Q|^{\frac{4}{N-2}} Q, \quad Q \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N).$$

“Unique” solution radiale (état fondamental) :

$$W = \frac{1}{\left(1 + \frac{|x|^2}{N(N-2)}\right)^{\frac{N}{2}-1}}.$$

Existence de solutions d'énergie arbitrairement grande : [W.Y. Ding 1986], [Del Pino, Musso, Pacard, Pistoia 2013].
Ondes solitaires ou solitons : , $p = |\mathbf{p}| < 1$:

$$Q_{\mathbf{p}}(t,x) = Q\left(\left(-\frac{t}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - 1\right)\mathbf{p}\cdot x\right)\mathbf{p} + x\right)$$

$$Q_{\mathbf{p}}(t,x) = Q_{\mathbf{p}}(0, x - t\mathbf{p}).$$

Comportement linéaire

u diffuse vers une solution linéaire (*scatters* en anglais) quand $T_+(u) = +\infty$ et il existe v_L solution de (LW) telle que

$$\lim_{t \to +\infty} \|\vec{u}(t) - \vec{v}_L(t)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

Comportement linéaire

u diffuse vers une solution linéaire (*scatters* en anglais) quand $T_+(u) = +\infty$ et il existe v_L solution de (LW) telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t) - \vec{v}_L(t)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

Toutes les solutions diffusent dans le cas défocalisant : [Grillakis 90, 92], [Shatah Struwe, 93, 94], [Kapitanski 94], [Ginibre Velo 95], [Nakanishi 95], [Bahouri Shatah 98], [Bahouri Gérard 99], [Tao 06]

Comportement linéaire

u diffuse vers une solution linéaire (*scatters* en anglais) quand $T_+(u) = +\infty$ et il existe v_L solution de (LW) telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t) - \vec{v}_L(t)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

Toutes les solutions diffusent dans le cas défocalisant : [Grillakis 90, 92], [Shatah Struwe, 93, 94], [Kapitanski 94], [Ginibre Velo 95], [Nakanishi 95], [Bahouri Shatah 98], [Bahouri Gérard 99], [Tao 06]

Dans le cas focalisant :

- Données initiales petites $\Longrightarrow$ *Scattering*.
- Existence d'opérateur d'ondes.
- Le *scattering* est stable.

Scattering petite donnée optimal

On rappelle

$$W(x) := \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{N}{2}-1}}.$$

Theorem

[Kenig Merle 2008] On considère

1. $\|(u_0,u_1)\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{2}{N}\int |\nabla W|^2$.
2. $E(u_0,u_1) < E(W,0)$ *et* $\int |\nabla u_0|^2 < \int |\nabla W|^2$.
3. $\sup_t \left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2} + \frac{N}{2}\|\partial_t u(t)\|^2_{L^2}\right) < \int |\nabla W|^2$.
4. *u est globale et diffuse vers une solution linéaire.*

Alors (1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(4).

Outline

Solutions globales non-linéaires

Existence de solutions globales de la forme :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), 0 \right) + \vec{v}_L(t) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où v_L est une petite solution de l'équation linéaire (LW).

Solutions globales non-linéaires

Existence de solutions globales de la forme :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), 0\right) + \vec{v}_L(t) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où v_L est une petite solution de l'équation linéaire (LW).

- $\lambda(t) = 1$ [Krieger Schlag 2007].

Solutions globales non-linéaires

Existence de solutions globales de la forme :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), 0 \right) + \vec{v}_L(t) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où v_L est une petite solution de l'équation linéaire (LW).

- $\lambda(t) = 1$ [Krieger Schlag 2007].
- $\lambda(t) = t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, α petit [Donninger Krieger 2013]

Solutions globales non-linéaires

Existence de solutions globales de la forme :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), 0\right) + \vec{v}_L(t) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où v_L est une petite solution de l'équation linéaire (LW).

- $\lambda(t) = 1$ [Krieger Schlag 2007].
- $\lambda(t) = t^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, α petit [Donninger Krieger 2013]
- Dynamique instable : les données initiales correspondent sont dans une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{H}$ [Krieger Nakanishi Schlag 2014].

Solutions globales non-linéaires

Existence de solutions globales de la forme :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), 0\right) + \vec{v}_L(t) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où v_L est une petite solution de l'équation linéaire (LW).

- $\lambda(t) = 1$ [Krieger Schlag 2007].
- $\lambda(t) = t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, α petit [Donninger Krieger 2013]
- Dynamique instable : les données initiales correspondent sont dans une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{H}$ [Krieger Nakanishi Schlag 2014].
- Questions ouvertes : existence solutions avec d'autres profils stationnaires que W ? Quels sont les $v_L(t)$ admissibles ?

Explosion de type II

Solutions telles que $T_+ < \infty$ et

$$\limsup_{t \to T_+} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Explosion de type II

Solutions telles que $T_+ < \infty$ et

$$\limsup_{t\to T_+} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Exemples connus :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{\cdot}{\lambda(t)}\right), 0 \right) + (v_0, v_1), \quad t \to T_+,$$

où $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$, et

- $N = 3$, $\lambda(t) = (T_+ - t)^\alpha$, $\alpha > 1$ [Krieger Schlag Tataru 2009], [Krieger Schlag 2014] (instabilité [Krieger Nahas 2013]).

Explosion de type II

Solutions telles que $T_+ < \infty$ et

$$\limsup_{t \to T_+} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Exemples connus :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{\cdot}{\lambda(t)}\right), 0 \right) + (v_0, v_1), \quad t \to T_+,$$

où $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$, et

- $N = 3$, $\lambda(t) = (T_+ - t)^\alpha$, $\alpha > 1$ [Krieger Schlag Tataru 2009], [Krieger Schlag 2014] (instabilité [Krieger Nahas 2013]).
- $N = 5$, $\lambda(t) = (T_+ - t)^\alpha$, $\alpha > 9$, [Jendrej 2015].

Explosion de type II

Solutions telles que $T_+ < \infty$ et

$$\limsup_{t\to T_+} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Exemples connus :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{\cdot}{\lambda(t)}\right), 0\right) + (v_0, v_1), \quad t \to T_+,$$

où $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$, et

- $N = 3$, $\lambda(t) = (T_+ - t)^\alpha$, $\alpha > 1$ [Krieger Schlag Tataru 2009], [Krieger Schlag 2014] (instabilité [Krieger Nahas 2013]).
- $N = 5$, $\lambda(t) = (T_+ - t)^\alpha$, $\alpha > 9$, [Jendrej 2015].
- $N = 4$, $\lambda(t) \approx (T_+ - t)e^{-\sqrt{|\log(T_+-t)|}}$, (v_0, v_1) de classe C^∞ [Hillairet Raphaël 2012].

Explosion de type II

Solutions telles que $T_+ < \infty$ et

$$\limsup_{t \to T_+} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Exemples connus :

$$\vec{u}(t) = \left(\frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}} W\left(\frac{\cdot}{\lambda(t)}\right), 0 \right) + (v_0, v_1), \quad t \to T_+,$$

où $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$, et

- $N = 3$, $\lambda(t) = (T_+ - t)^\alpha$, $\alpha > 1$ [Krieger Schlag Tataru 2009], [Krieger Schlag 2014] (instabilité [Krieger Nahas 2013]).
- $N = 5$, $\lambda(t) = (T_+ - t)^\alpha$, $\alpha > 9$, [Jendrej 2015].
- $N = 4$, $\lambda(t) \approx (T_+ - t)e^{-\sqrt{|\log(T_+ - t)|}}$, (v_0, v_1) de classe C^∞ [Hillairet Raphaël 2012].
- $N = 5$, $\lambda(t) \approx (T_+ - t)^4$, pour toute donnée régulière (v_0, v_1) telle que $v_0(0) > 0$ [Jendrej 2015].

Multi-solitons

Existence d'une solution u telle que $T_+ = +\infty$ et

$$\vec{u}(t,x) = \left(W(x) + \frac{1}{\lambda(t)^2} W\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), 0 \right) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où $N = 6$, $\lambda(t) = \sqrt{4/5}\, e^{-\sqrt{5/4}t}$. [Jendrej 2016].

Multi-solitons

Existence d'une solution u telle que $T_+ = +\infty$ et

$$\vec{u}(t,x) = \left(W(x) + \frac{1}{\lambda(t)^2} W\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), 0 \right) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où $N = 6$, $\lambda(t) = \sqrt{4/5}e^{-\sqrt{5/4}t}$. [Jendrej 2016].
Existence de solutions u telles que $T_+ = +\infty$ et

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{j=1}^{J} \frac{\iota_j}{\lambda_j^{\frac{3}{2}}} \vec{W}_{\mathbf{p}_j}\left(\frac{t}{\lambda_j}, \frac{x - x_j}{\lambda_j}\right) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où $N = 5$, $\iota_j \in \{\pm 1\}$, $\lambda_j > 0$, $x_j \in \mathbb{R}^5$, $|\mathbf{p}_j| < 1$ (colinéaire si $J \geq 3$) et

$$j \neq k \Longrightarrow \mathbf{p}_j \neq \mathbf{p}_k.$$

[Martel Merle 2015].

Multi-solitons

Existence d'une solution u telle que $T_+ = +\infty$ et

$$\vec{u}(t,x) = \left(W(x) + \frac{1}{\lambda(t)^2} W\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), 0\right) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où $N = 6$, $\lambda(t) = \sqrt{4/5}e^{-\sqrt{5/4}t}$. [Jendrej 2016].
Existence de solutions u telles que $T_+ = +\infty$ et

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{j=1}^{J} \frac{\iota_j}{\lambda_j^{\frac{3}{2}}} \vec{W}_{\mathbf{p}_j}\left(\frac{t}{\lambda_j}, \frac{x - x_j}{\lambda_j}\right) + o(1), \quad t \to +\infty,$$

où $N = 5$, $\iota_j \in \{\pm 1\}$, $\lambda_j > 0$, $x_j \in \mathbb{R}^5$, $|\mathbf{p}_j| < 1$ (colinéaire si $J \geq 3$) et

$$j \neq k \Longrightarrow \mathbf{p}_j \neq \mathbf{p}_k.$$

[Martel Merle 2015].
Questions ouvertes : explosion en temps fini avec plusieurs profils, contraintes sur les paramètres [Jendrej], existences de solutions avec d'autres profils que W.

Outline

Existence du terme de radiation

Théorème. [TD Kenig Merle 2013,2016] *Soit u une solution non scattering telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe une solution v_L de (LW) telle que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq t-A} |\nabla_{t,x}(u - v_L)|^2 \, dx = 0.$$

Existence du terme de radiation

Théorème. [TD Kenig Merle 2013,2016] *Soit u une solution non scattering telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe une solution v_L de (LW) telle que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq t-A} |\nabla_{t,x}(u - v_L)|^2 \, dx = 0.$$

- Preuve assez simple dans le cas radial : les solutions localisées au voisinage de $|x| = t$ sont essentiellement linéaires.

Existence du terme de radiation

Théorème. [TD Kenig Merle 2013,2016] *Soit u une solution non scattering telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe une solution v_L de (LW) telle que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq t-A} |\nabla_{t,x}(u - v_L)|^2 \, dx = 0.$$

- Preuve assez simple dans le cas radial : les solutions localisées au voisinage de $|x| = t$ sont essentiellement linéaires.
- Dans le cas non radial, il faut exclure des profils localisés au voisinage d'un point de la forme $x = t\mathbf{p}$, $|\mathbf{p}| = 1$ (utilisation d'identités de type viriel).

Théorème. [TD Jia Kenig Merle, 2016] *Soit u une solution non scattering telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Théorème. [TD Jia Kenig Merle, 2016] *Soit u une solution non scattering telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe $t_n \to +\infty$, $J \geq 1$, des ondes solitaires $Q^j_{\mathbf{p}_j}$, $j = 1 \dots J$, des paramètres $x_{j,n} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_{j,n} > 0$, tels que

$$u(t_n) = v_L(t_n) + \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\lambda_{j,n}^{\frac{N-2}{2}}} Q^j_{\mathbf{p}_j}\left(\frac{t_n}{\lambda_{j,n}}, \frac{x - x_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) + r_n$$

Théorème. [TD Jia Kenig Merle, 2016] *Soit u une solution non scattering telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe $t_n \to +\infty$, $J \geq 1$, des ondes solitaires $Q^j_{\mathbf{p}_j}$, $j = 1 \dots J$, des paramètres $x_{j,n} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_{j,n} > 0$, tels que

$$u(t_n) = v_L(t_n) + \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\lambda_{j,n}^{\frac{N-2}{2}}} Q^j_{\mathbf{p}_j}\left(\frac{t_n}{\lambda_{j,n}}, \frac{x - x_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) + r_n$$

(+ dévt analogue pour la dérivée en temps) où

- $\lim_{n\to+\infty} \|\vec{r}_n\|_{\mathcal{H}} = 0$
- $\forall j, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{j,n}}{t_n} = \mathbf{0}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{j,n}}{t_n} = 0$
- $j \neq k \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{j,n}+t_n\mathbf{p}_j - x_{k,n} - t_n\mathbf{p}_k|}{\lambda_{j,n}} + \frac{\lambda_{j,n}}{\lambda_{k,n}} + \frac{\lambda_{k,n}}{\lambda_{j,n}} = +\infty.$

Théorème. [TD Jia Kenig Merle, 2016] *Soit u une solution non scattering telle que* $T_+(u) = +\infty$ *et*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe $t_n \to +\infty$, $J \geq 1$, *des ondes solitaires* $Q^j_{\mathbf{p}_j}$, $j = 1 \ldots J$, *des paramètres* $x_{j,n} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_{j,n} > 0$, *tels que*

$$u(t_n) = v_L(t_n) + \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\lambda_{j,n}^{\frac{N-2}{2}}} Q^j_{\mathbf{p}_j}\left(\frac{t_n}{\lambda_{j,n}}, \frac{x - x_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) + r_n$$

(+ dévt analogue pour la dérivée en temps) où

- $\lim_{n\to+\infty} \|\vec{r}_n\|_{\mathcal{H}} = 0$
- $\forall j, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{j,n}}{t_n} = \mathbf{0}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{j,n}}{t_n} = 0$
- $j \neq k \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{j,n}+t_n\mathbf{p}_j - x_{k,n} - t_n\mathbf{p}_k|}{\lambda_{j,n}} + \frac{\lambda_{j,n}}{\lambda_{k,n}} + \frac{\lambda_{k,n}}{\lambda_{j,n}} = +\infty.$

(Théorème analogue pour les solutions explosives bornées). Cf aussi [Hao Jia, 2015].

Cas radial, $N = 3$

Théorème. *On suppose $N = 3$. Soit u une solution radiale, non scattering, telle que $T_+(u) = +\infty$.*

Cas radial, $N = 3$

Théorème. *On suppose $N = 3$. Soit u une solution radiale, non scattering, telle que $T_+(u) = +\infty$. Alors il existe $J \geq 1$ et :*

- *des signes $\iota_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1 \dots J$,*
- *des paramètres $\lambda_j(t)$, $0 < \lambda_1(t) \ll \lambda_2(t) \ll \dots \ll \lambda_J(t) \ll t$,*

tels que :

Théorème. *On suppose* $N = 3$. *Soit* u *une solution radiale, non scattering, telle que* $T_+(u) = +\infty$. *Alors il existe* $J \geq 1$ *et :*

- *des signes* $\iota_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1 \dots J$,
- *des paramètres* $\lambda_j(t)$, $0 < \lambda_1(t) \ll \lambda_2(t) \ll \dots \ll \lambda_J(t) \ll t$,

tels que :

$$u(t) = v_L(t) + \sum_{j=1}^{J} \frac{\iota_j}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}(t)} W\left(\frac{x}{\lambda_j(t)}\right) + r(t),$$

où : $\lim_{t \to +\infty} \left\| \vec{r}(t) \right\|_{\mathcal{H}} = 0$.

Cas radial, $N = 3$

Théorème. *On suppose $N = 3$. Soit u une solution radiale, non scattering, telle que $T_+(u) = +\infty$. Alors il existe $J \geq 1$ et :*

- *des signes $\iota_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1 \dots J$,*
- *des paramètres $\lambda_j(t)$, $0 < \lambda_1(t) \ll \lambda_2(t) \ll \dots \ll \lambda_J(t) \ll t$,*

tels que :

$$u(t) = v_L(t) + \sum_{j=1}^{J} \frac{\iota_j}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}(t)} W\left(\frac{x}{\lambda_j(t)}\right) + r(t),$$

où : $\lim_{t\to+\infty} \left\|\vec{r}(t)\right\|_{\mathcal{H}} = 0$. (Résultat analogue pour les solutions explosives de type II).

Outline

Équirépartition pour l'équation linéaire

Théorème [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Soit u_L une solution de l'équation des ondes linéaires. Alors :*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u_L(t,x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{t,x} u_L(0,x)|^2 \, dx.$$

Équirépartition pour l'équation linéaire

Théorème [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Soit u_L une solution de l'équation des ondes linéaires. Alors :*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u_L(t,x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{t,x} u_L(0,x)|^2\, dx.$$

Preuve par un argument de symétrie, utilisant l'expression de la solution.

Équirépartition pour l'équation linéaire

Théorème [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Soit u_L une solution de l'équation des ondes linéaires. Alors :*

$$\sum_{\pm} \lim_{t \to \pm\infty} \int_{|x| \geq |t|} |\nabla_{t,x} u_L(t,x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{t,x} u_L(0,x)|^2 \, dx.$$

Preuve par un argument de symétrie, utilisant l'expression de la solution.

Faux en dimension d'espace paire [Côte, Kenig, Schlag 2014].

Équirépartition pour l'équation linéaire

Théorème [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Soit u_L une solution de l'équation des ondes linéaires. Alors :*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u_L(t,x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{t,x} u_L(0,x)|^2 \, dx.$$

Preuve par un argument de symétrie, utilisant l'expression de la solution.
Faux en dimension d'espace paire [Côte, Kenig, Schlag 2014].

Question : pour quelles solutions de équations (NLW) existe-t-il $\eta > 0$.

$$\forall t \geq 0 \text{ ou } \forall t \leq 0, \quad \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 \, dx \geq \eta?$$

Borne inférieure pour (NLW)

Théorème (petites données) [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si u est une solution de* (NLW) *avec :*

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon_0,$$

alors :

$$\sum_{\pm} \lim_{t \to \pm\infty} \int_{|x| \geq |t|} |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 \, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{t,x} u(0,x)|^2 \, dx.$$

Borne inférieure pour (NLW)

Théorème (petites données) [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que si u est une solution de* (NLW) *avec :*

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon_0,$$

alors :

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 \, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{t,x} u(0,x)|^2 \, dx.$$

Théorème de rigidité [TD Kenig Merle 2012] *On suppose* $N = 3$*. Soit u une solution globale et radiale de (NLW). On suppose*

$$\sum_{\pm} \liminf_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u|^2 \, dx = 0.$$

Alors $u = 0$ *ou il existe* $\lambda > 0$, $\iota \in \{\pm 1\}$ *tel que* $u(t,x) = \frac{\iota}{\lambda^{1/2}} W\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Questions ouvertes

- Résolution en soliton générales pour les ondes critiques.

Questions ouvertes

- Résolution en soliton générales pour les ondes critiques.
- Configurations asymptotiques possibles dans le cas des ondes critiques ? [Jendrej 2015, Martel Merle 2017]

Questions ouvertes

- Résolution en soliton générales pour les ondes critiques.
- Configurations asymptotiques possibles dans le cas des ondes critiques ? [Jendrej 2015, Martel Merle 2017]
- Wave maps : [Christodoulou, Tahvildar-Zadeh 1993], [Struwe 2003], [Tao 2009], [Sterbenz, Tataru 2010], [Krieger Schlag 2012], [Côte, Kenig, Lawrie, Schlag 2015], [Côte 2015], [Kenig, Lawrie, Liu, Schlag 2015], [Kenig Jia 2016] [Grinis 2017], [Duyckaerts Jia Kenig Merle 2016], [Jendrej Lawrie 2017].

Questions ouvertes

- Résolution en soliton générales pour les ondes critiques.
- Configurations asymptotiques possibles dans le cas des ondes critiques ? [Jendrej 2015, Martel Merle 2017]
- Wave maps : [Christodoulou, Tahvildar-Zadeh 1993], [Struwe 2003], [Tao 2009], [Sterbenz, Tataru 2010], [Krieger Schlag 2012], [Côte, Kenig, Lawrie, Schlag 2015], [Côte 2015], [Kenig, Lawrie, Liu, Schlag 2015], [Kenig Jia 2016] [Grinis 2017], [Duyckaerts Jia Kenig Merle 2016], [Jendrej Lawrie 2017].
- Résolution en soliton pour d'autres équations dispersives non-linéaires non-complètement intégrables, et pour des données peu régulières dans le cas peu intégrales. NLS L^2-critique [Merle Raphaël], gKdV [Martel Merle], Existence d'un attracteur compact pour NLS : [Tao 2007,2008], [Tristan Roy]. Autour de l'état fondamental pour (NLS) et Klein-Gordon : [Nakanishi Schlag].

Questions ouvertes

- Résolution en soliton générales pour les ondes critiques.
- Configurations asymptotiques possibles dans le cas des ondes critiques ? [Jendrej 2015, Martel Merle 2017]
- Wave maps : [Christodoulou, Tahvildar-Zadeh 1993], [Struwe 2003], [Tao 2009], [Sterbenz, Tataru 2010], [Krieger Schlag 2012], [Côte, Kenig, Lawrie, Schlag 2015], [Côte 2015], [Kenig, Lawrie, Liu, Schlag 2015], [Kenig Jia 2016] [Grinis 2017], [Duyckaerts Jia Kenig Merle 2016], [Jendrej Lawrie 2017].
- Résolution en soliton pour d'autres équations dispersives non-linéaires non-complètement intégrables, et pour des données peu régulières dans le cas peu intégrales. NLS L^2-critique [Merle Raphaël], gKdV [Martel Merle], Existence d'un attracteur compact pour NLS : [Tao 2007,2008], [Tristan Roy]. Autour de l'état fondamental pour (NLS) et Klein-Gordon : [Nakanishi Schlag].
- Ondes surcritiques [Kenig Merle 2011], [Killip Vişan 2011], [Collot 2015], [Krieger Schlag 2015], [TD, Roy 2017], [TD, Jianwey Yang 2017].

Bonus : inégalité de type Morawetz

Lemme. *Soit u une solution non-scattering telle que* $T_+(u) = +\infty$ *et*

$$\limsup_{t\to\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe $C > 0$ *tel que, pour* $0 < 10t_1 < t_2$*,*

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{|x|<t} \left(\partial_t u + \frac{x}{t} \cdot \nabla u + \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{u}{t}\right)^2 dx \, \frac{dt}{t} \leq C \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bonus : inégalité de type Morawetz

Lemme. *Soit u une solution non-scattering telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe $C > 0$ tel que, pour $0 < 10t_1 < t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{|x|<t} \left(\partial_t u + \frac{x}{t} \cdot \nabla u + \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{u}{t}\right)^2 dx \, \frac{dt}{t} \leq C \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Corollaire. *Il existe $t_n \to +\infty$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|<t_n} \left(\partial_t u(t_n) + \frac{x}{t_n} \cdot \nabla u(t_n) + \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{u(t_n)}{t_n}\right)^2 dx = 0.$$