Description des vorticités limites des équations de Ginzburg-Landau

Rémy Rodiac (UCL Louvain-la-Neuve)

Journée des jeunes EDPistes français

Nancy-22/03/2018

Plan

1. Présentation du problème
2. Motivations physiques
3. Esquisse de preuve du résultat

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert lisse borné. Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des mesures de Radon sur Ω.

Question : Quelle est la régularité de $h \in H^1(\Omega)$ et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ telles que

$$-\Delta h + h = \mu \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\partial_{\bar{z}}\left[(\partial_z h)^2\right] = \frac{1}{4}\partial_z(h^2) \quad \text{dans } \Omega.? \tag{2}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert lisse borné. Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des mesures de Radon sur Ω.

Question : Quelle est la régularité de $h \in H^1(\Omega)$ et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ telles que

$$-\Delta h + h = \mu \ \text{ dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\partial_{\bar{z}} \left[(\partial_z h)^2 \right] = \frac{1}{4} \partial_z (h^2) \ \text{ dans } \Omega.? \tag{2}$$

En particulier comment est le support de μ (courbes, ensembles de mesure de Lebesgue 2D pleine,...) ?

Une fonction $h \in H^1(\Omega)$ telle que $\partial_{\bar{z}}\left[(\partial_z h)^2\right] = \frac{1}{4}\partial_z(h^2)$ est *stationnaire* pour l'énergie

$$F(h) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 + h^2. \tag{3}$$

Une fonction $h \in H^1(\Omega)$ telle que $\partial_{\bar{z}}\left[(\partial_z h)^2\right] = \frac{1}{4}\partial_z(h^2)$ est *stationnaire* pour l'énergie

$$F(h) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 + h^2. \tag{3}$$

Une fonction $h \in H^1(\Omega)$ est dite *stationnaire* pour F si pour tout $X \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ on a :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} F(h(x + tX(x))) = 0. \tag{4}$$

Le calcul (4) donne : h stationnaire si et seulement si

$$\mathrm{div}(T_h) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{5}$$

où T_h est le tenseur énergie-impulsion associé à F :

$$T_h = \begin{pmatrix} (\partial_y h)^2 - (\partial_x h)^2 + h^2 & -2(\partial_x h)(\partial_y h) \\ -2(\partial_x h)(\partial_y h) & (\partial_x h)^2 - (\partial_y h)^2 + h^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Le calcul (4) donne : h stationnaire si et seulement si

$$\mathrm{div}(T_h) = 0 \ \text{ dans } \Omega \tag{5}$$

où T_h est le tenseur énergie-impulsion associé à F :

$$T_h = \begin{pmatrix} (\partial_y h)^2 - (\partial_x h)^2 + h^2 & -2(\partial_x h)(\partial_y h) \\ -2(\partial_x h)(\partial_y h) & (\partial_x h)^2 - (\partial_y h)^2 + h^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(1) et (2) se réécrivent formellement

$$(-\Delta h + h)\nabla h = \mu \nabla h = 0 \tag{7}$$

Le calcul (4) donne : h stationnaire si et seulement si

$$\mathrm{div}(T_h) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{5}$$

où T_h est le tenseur énergie-impulsion associé à F :

$$T_h = \begin{pmatrix} (\partial_y h)^2 - (\partial_x h)^2 + h^2 & -2(\partial_x h)(\partial_y h) \\ -2(\partial_x h)(\partial_y h) & (\partial_x h)^2 - (\partial_y h)^2 + h^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(1) et (2) se réécrivent formellement

$$(-\Delta h + h)\nabla h = \mu \nabla h = 0 \tag{7}$$

Remarque : Les fonctions stationnaires pour F sont des points critiques pour les variations internes.
Les solutions de $-\Delta h + h = 0$ sont des points critiques pour les variations externes.

EXEMPLE 1 : Si h vérifie $-\Delta h + h = 0$ alors h est stationnaire pour F.

EXEMPLE 1 : Si h vérifie $-\Delta h + h = 0$ alors h est stationnaire pour F.

EXEMPLE 2 : Soit $\lambda > 0$ et h_* l'unique minimiseur de

$$\min\{F(u); u \in H_1^1(\Omega),\ u \geq 1 - \frac{1}{2\lambda}\}. \tag{8}$$

Alors h_* est stationnaire pour F, $h_* \in C^{1,1}(\Omega)$ et $-\Delta h_* + h_* = (1 - \frac{1}{2\lambda})\mathbf{1}_{\{\nabla h_* = 0\}} = h_* \mathbf{1}_{\{\nabla h_* = 0\}} \in L^\infty(\Omega)$.

EXEMPLE 1 : Si h vérifie $-\Delta h + h = 0$ alors h est stationnaire pour F.

EXEMPLE 2 : Soit $\lambda > 0$ et h_* l'unique minimiseur de

$$\min\{F(u); u \in H_1^1(\Omega),\ u \geq 1 - \frac{1}{2\lambda}\}. \tag{8}$$

Alors h_* est stationnaire pour F, $h_* \in C^{1,1}(\Omega)$ et
$-\Delta h_* + h_* = (1 - \frac{1}{2\lambda})\mathbf{1}_{\{\nabla h_* = 0\}} = h_* \mathbf{1}_{\{\nabla h_* = 0\}} \in L^\infty(\Omega)$.

EXEMPLE 3 : Pour $(x, y) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$, soit
$h(x, y) := \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ e^{-x} \text{ si } x > 0. \end{cases}$ Alors h est stationnaire pour F,
$h \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $\mu = -2|h'|\mathcal{H}^1_{\lfloor\{x=0\}}$.

Théorème (RR)

Soit $h \in H^1(\Omega)$ qui vérifie (1) et (2) alors

1) *(Sandier-Serfaty '07) $|\nabla h|^2$ est dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Théorème (RR)

Soit $h \in H^1(\Omega)$ *qui vérifie* (1) *et* (2) *alors*

1) *(Sandier-Serfaty '07)* $|\nabla h|^2$ *est dans* $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p < +\infty$.
2) $\operatorname{supp} \mu \cap \{|\nabla h| > 0\}$ *est localement* $\mathcal{H}^1$*-rectifiable. Il existe* $\sigma : \operatorname{supp} \mu \cap \{|\nabla h| > 0\} \to \{\pm 1\}$ *telle que*

$$\mu = h\mathbf{1}_{\{|\nabla h|=0\}} + 2\sigma(x)|\nabla h|\mathcal{H}^1_{\lfloor \operatorname{supp} \mu \cap \{|\nabla h|>0\}}. \qquad (9)$$

Théorème (RR)

Soit $h \in H^1(\Omega)$ qui vérifie (1) et (2) alors

1) *(Sandier-Serfaty '07)* $|\nabla h|^2$ *est dans* $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p < +\infty$.
2) $\operatorname{supp}\mu \cap \{|\nabla h| > 0\}$ *est localement* $\mathcal{H}^1$*-rectifiable. Il existe* $\sigma : \operatorname{supp}\mu \cap \{|\nabla h| > 0\} \to \{\pm 1\}$ *telle que*

$$\mu = h\mathbf{1}_{\{|\nabla h|=0\}} + 2\sigma(x)|\nabla h|\mathcal{H}^1_{\lfloor \operatorname{supp}\mu \cap \{|\nabla h|>0\}}. \tag{9}$$

3) *h est constante sur les composantes connexes du support de μ.*

Supraconductivité : modèle de Ginzburg-Landau (GL) (*avec champ magnétique*). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$G_\varepsilon(u,A) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u - iAu|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u|^2)^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |h - h_{ex}|^2$$

avec

- $u : \Omega \to \mathbb{C}$ fonction d'onde, en général $|u| \leq 1$ et $|u| \simeq 1=$ phase supraconductrice, $|u| \simeq 0=$ phase normale.
- $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre.
- $h_{ex} > 0$ est l'intensité du champ magnétique extérieur, A est le potentiel magnétique et $h = \operatorname{curl} A$ est le champ magnétique induit.

Vortex $=$ régions où $|u| \simeq 0$ et autour desquelles u a un degré non nul.

Le degré d'un vortex au point x_0 est :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_r(x_0)} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = d \in \mathbb{Z}$$

avec $u = \rho e^{i\varphi}$ près de x_0.

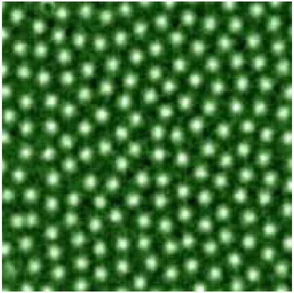

FIGURE – Vortex (blanc)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine lisse borné simplement connexe. Soit $\{(u_\varepsilon, A_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ des points critiques de G_ε.
On pose

$$j_\varepsilon = \langle iu_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon - iA_\varepsilon u_\varepsilon \rangle, \quad \mu_\varepsilon = \operatorname{curl} j_\varepsilon + \operatorname{curl} A_\varepsilon.$$

Alors

$$-\Delta h_\varepsilon + h_\varepsilon = \mu_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega.$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine lisse borné simplement connexe. Soit $\{(u_\varepsilon, A_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ des points critiques de G_ε.
On pose

$$j_\varepsilon = \langle iu_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon - iA_\varepsilon u_\varepsilon \rangle, \quad \mu_\varepsilon = \operatorname{curl} j_\varepsilon + \operatorname{curl} A_\varepsilon.$$

Alors

$$-\Delta h_\varepsilon + h_\varepsilon = \mu_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega.$$

Quand $\varepsilon \to 0$,

$$\mu_\varepsilon \simeq 2\pi \sum_i^{N_\varepsilon} d_i^\varepsilon \delta_{a_i^\varepsilon}.$$

Avec a_i^ε sont les vortex et d_i^ε leurs degrés. On pose $n_\varepsilon := 2\pi \sum_i |d_i^\varepsilon|$.

Théorème (Sandier-Serfaty'03)

Soit $\{(u_\varepsilon, A_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ *comme avant. On suppose* $h_{ex} \leq C \log \varepsilon$ *et* $G_\varepsilon(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq C h_{ex}^2$*. Si* $n_\varepsilon \sim C h_{ex}$ $(C > 0)$ *alors, quitte à extraire,*

$$\frac{h_\varepsilon}{h_{ex}} \rightharpoonup h \text{ dans } H^1(\Omega)$$

$$\frac{\mu_\varepsilon}{h_{ex}} \rightharpoonup \mu = -\Delta h + h \in \mathcal{M} \cap H^{-1}(\Omega) \text{ au sens des mesures.}$$

$$\partial_{\bar{z}} \left[(\partial_z h)^2 \right] = \frac{1}{4} \partial_z (h^2).$$

Soit h dans $H^1(\Omega)$ qui vérifie (1) et (2). Soit $z_0 \in \operatorname{supp} \mu$ tel que $\nabla h(z_0) \neq 0$.

Soit h dans $H^1(\Omega)$ qui vérifie (1) et (2). Soit $z_0 \in \operatorname{supp} \mu$ tel que $\nabla h(z_0) \neq 0$.
Etape 1 : De (2) on déduit qu'il existe α dans $W^{1,q}$ pour tout $1 \leq q < +\infty$ et f holomorphe telle que

$$(\partial_z h)^2 = \alpha + f.$$

Soit h dans $H^1(\Omega)$ qui vérifie (1) et (2). Soit $z_0 \in \operatorname{supp} \mu$ tel que $\nabla h(z_0) \neq 0$.

Etape 1 : De (2) on déduit qu'il existe α dans $W^{1,q}$ pour tout $1 \leq q < +\infty$ et f holomorphe telle que

$$(\partial_z h)^2 = \alpha + f.$$

On peut trouver $R > 0$ tel que dans B_R on a

$$\partial_z h = \theta \sqrt{\alpha + f}$$

avec $\theta : B_R \to \{\pm 1\}$.

Soit h dans $H^1(\Omega)$ qui vérifie (1) et (2). Soit $z_0 \in \operatorname{supp} \mu$ tel que $\nabla h(z_0) \neq 0$.

Etape 1 : De (2) on déduit qu'il existe α dans $W^{1,q}$ pour tout $1 \leq q < +\infty$ et f holomorphe telle que

$$(\partial_z h)^2 = \alpha + f.$$

On peut trouver $R > 0$ tel que dans B_R on a

$$\partial_z h = \theta \sqrt{\alpha + f}$$

avec $\theta : B_R \to \{\pm 1\}$.On pose $g := \sqrt{\alpha + f}$ et on peut montrer qu'il existe H dans $W^{2,p}$ pour tout $1 \leq p < +\infty$ tel que $g = \partial_z H$ et alors

$$\partial_z h = \theta \partial_z H. \tag{10}$$

Etape 2 : On utilise $-\Delta h + h = \mu$ pour obtenir

$$\theta \in BV(B_R).$$

Par conséquent $\nabla h \in BV(B_R)$. On pose

$$B_R^+ := \{z \in B_R; \theta(z) = +1\} \qquad B_R^- = B_R \setminus B_R^+.$$

Ce sont des *ensembles de périmètre fini*.

La relation (10) donne

$$\nu_{B_R^+} \text{ est parallèle à } \nabla h \text{ et } \nabla H.$$

La relation (10) donne

$$\nu_{B_R^+} \text{ est parallèle à } \nabla h \text{ et } \nabla H.$$

On utilise $h \in H^1$, $\nabla h = \pm \nabla H$ dans B_R^+ et $-\Delta h + h = \mu$ pour déduire que

$$\mu_{B_R} = -2\nabla H \cdot \nu_{B_R^+} \mathcal{H}^1_{\partial_* B_R^+ \setminus \partial B_R}.$$

La relation (10) donne

$$\nu_{B_R^+} \text{ est parallèle à } \nabla h \text{ et } \nabla H.$$

On utilise $h \in H^1$, $\nabla h = \pm \nabla H$ dans B_R^+ et $-\Delta h + h = \mu$ pour déduire que

$$\mu_{B_R} = -2\nabla H \cdot \nu_{B_R^+} \mathcal{H}^1_{\partial_* B_R^+ \setminus \partial B_R}.$$

En utilisant la théorie des ensembles de périmètre fini dans $\mathbb{R}^2$ (Fleming '57, Ambrosio-Caselles-Masnou-Morel '00) on peut montrer

$$\operatorname{supp} \mu_{B_{R'}} = \{z \in B_{R'};\ H(z) = 0\}.$$

On peut alors montrer $\nabla h \in BV_{loc}(\Omega)$ en utilisant l'analyse précédente et un lemme de recouvrement de Besicovitch.

On peut alors montrer $\nabla h \in BV_{loc}(\Omega)$ en utilisant l'analyse précédente et un lemme de recouvrement de Besicovitch.

Alors, en appliquant la théorie des fonctions BV on trouve :

$$D^2 h_{\{\lfloor|\nabla h|=0\}} = 0, \tag{11}$$

ou encore

$$(-\Delta h + h)_{\{\lfloor|\nabla h|=0\}} = h\mathbf{1}_{\{|\nabla h|=0\}}. \tag{12}$$

L'étape précédente a aussi donné *h est constante* sur les composantes connexes (c.c) de $\operatorname{supp}\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}$ et par continuité de h sur les c.c de $\overline{\operatorname{supp}\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}}$.

L'étape précédente a aussi donné h est constante sur les composantes connexes (c.c) de $\operatorname{supp}\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}$ et par continuité de h sur les c.c de $\overline{\operatorname{supp}\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}}$.

On pose $\Omega' := \Omega \setminus \overline{\operatorname{supp}\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}}$. C'est un ouvert.

L'étape précédente a aussi donné h est constante sur les composantes connexes (c.c) de $\operatorname{supp}\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}$ et par continuité de h sur les c.c de $\overline{\operatorname{supp}\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}}$.
On pose $\Omega' := \Omega \setminus \overline{\operatorname{supp}\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}}$. C'est un ouvert.

Proposition

On a

$$\nabla h \text{ est dans } C^0(\Omega') \tag{13}$$

$$\Delta h = h \quad \text{dans } \{|\nabla h| \neq 0\} \cap \Omega'. \tag{14}$$

(au sens des viscosités).

L'étape précédente a aussi donné h est constante sur les composantes connexes (c.c) de $\mathrm{supp}\,\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}$ et par continuité de h sur les c.c de $\overline{\mathrm{supp}\,\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}}$.
On pose $\Omega' := \Omega \setminus \overline{\mathrm{supp}\,\mu \cap \{x; \nabla h(x) \neq 0\}}$. C'est un ouvert.

Proposition

On a

$$\nabla h \text{ est dans } C^0(\Omega') \tag{13}$$

$$\Delta h = h \quad \text{dans } \{|\nabla h| \neq 0\} \cap \Omega'. \tag{14}$$

(au sens des viscosités).

On peut appliquer les résultats de Caffarelli-Salazar ('02) et Caffarelli-Salazar-Shahgholian ('04) pour obtenir

$$h \text{ est dans } W^{2,p}(\Omega') \text{ pour tout } 1 \leq p < +\infty.$$

On utilise alors une version Sobolev du théorème de Morse-Sard

Théorème (De Pascale ('01)-Figalli ('08))

Soit $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ tel que $f \in W^{2,p}_{loc}(\Omega')$ pour un $p > 2$ alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^1$ nulle.

On utilise alors une version Sobolev du théorème de Morse-Sard

Théorème (De Pascale ('01)-Figalli ('08))

Soit $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ tel que $f \in W^{2,p}_{loc}(\Omega')$ pour un $p > 2$ alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^1$ nulle.

Alors h est constante sur les c.c. de supp $\mu \cap \Omega'$ et par continuité h est constante sur les c.c. de supp μ.

Merci pour votre attention !