

Dynamique en temps long de quelques EDP dispersives via des mesures invariantes

Mouhamadou SY
Université de Cergy-Pontoise

JEF2018, Nancy

Soit (H, ϕ_t) un système dynamique.

Sur l'espace des fonctions continues bornées $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, on a une dynamique S_t donnée par

$$S_t f(\cdot) = f(\phi_t \cdot).$$

Et sur l'espace des mesures de probabilités $\mu : \mathbb{B}(H) \rightarrow [0,1]$, on définit la dynamique S_t^*

$$\text{par } S_t^* \mu(\cdot) = \mu(\phi_t^{-1} \cdot).$$

Une mesure μ est invariante pour (H, ϕ_t) si

$$S_t^* \mu = \mu \text{ pour tout } t.$$

1 Etude de la dynamique en temps long:

Soit μ est invariante pour (H, ϕ_t) (Ex: ϕ_t est le flot d'une EDP bien posée sur H).

- Théorème de récurrence de Poincaré:

Si $\mu(B) > 0$ alors pour μ -presque tout $x \in B$, il existe $t_n \rightarrow \infty$ telle que $\phi_{t_n} x \in B$, $\forall n$.

- Théorèmes ergodiques:

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_t f(x) dt \rightarrow \tilde{f}(x) \text{ quand } T \rightarrow \infty :$$

dans L^2 (von Neumann), dans L^1 et p.s. (Birkhoff).

2 Théorie de Cauchy probabiliste.

1 Equation de Benjamin-Ono

$$\partial_t u + H \partial_x^2 u + u \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{T},$$

" $\hat{H}(n) = -i \operatorname{sign}(n)$ ". GWP dans H^s , $s \geq 0$ (voir e.g. Molinet).

Infinité de lois de conservation:

$$E_n(u) = \|u\|_n^2 + \text{"reste d'ordre inferieur"} \quad n \in \mathbb{N}/2.$$

Mesures de type Gibbs (Deng, Tzvetkov, Visciglia)

$$\mu_n(du) = \text{"e^{-reste} e^{-\|u\|_n^2} du"}, \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}-}) = 1, \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}}) = 0.$$

1 Equation de Benjamin-Ono

$$\partial_t u + H \partial_x^2 u + u \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{T},$$

" $\hat{H}(n) = -i \operatorname{sign}(n)$ ". GWP dans H^s , $s \geq 0$ (voir e.g. Molinet).

Infinité de lois de conservation:

$$E_n(u) = \|u\|_n^2 + \text{"reste d'ordre inferieur"} \quad n \in \mathbb{N}/2.$$

Mesures de type Gibbs (Deng, Tzvetkov, Visciglia)

$$\mu_n(du) = \text{"e^{-reste} e^{-\|u\|_n^2} du"}, \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}-}) = 1, \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Et pour l'espace C^∞ ?

1 Equation de Benjamin-Ono

$$\partial_t u + H\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{T},$$

" $\hat{H}(n) = -i \operatorname{sign}(n)$ ". GWP dans H^s , $s \geq 0$ (voir e.g. Molinet).

Infinité de lois de conservation:

$$E_n(u) = \|u\|_n^2 + \text{"reste d'ordre inférieur"} \quad n \in \mathbb{N}/2.$$

Mesures de type Gibbs (Deng, Tzvetkov, Visciglia)

$$\mu_n(du) = "e^{-\text{reste}} e^{-\|u\|_n^2} du", \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}-}) = 1, \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Et pour l'espace C^∞ ?

2 Equation de Klein-Gordon/Ondes en dimension 3

$$\partial_t^2 u - \Delta u + m_0^2 u + |u|^{p-1} u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^3 \text{ ou } D. \quad (KG - p)$$

Une loi coercive:

$$E(u, \partial_t u) = \int \frac{1}{2} \left(|\nabla u|^2 + m_0^2 u^2 + \frac{2}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx, \quad \text{Critique quand } p=5.$$

Dans le cas radial, la mesure de Gibbs

$$e^{-\frac{1}{p} \int |u|^p} e^{-\frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 + m_0^2 u^2)}, \quad \text{pour } p < 5,$$

est invariante, elle est concentrée sur $H^{1-}/2 \times H^{-1-}/2$ (Burq-Tzvetkov, de Suzzoni, Bourgain-Bulut, Xu).

1 Equation de Benjamin-Ono

$$\partial_t u + H\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{T},$$

" $\hat{H}(n) = -i \operatorname{sign}(n)$ ". GWP dans H^s , $s \geq 0$ (voir e.g. Molinet).

Infinité de lois de conservation:

$$E_n(u) = \|u\|_n^2 + \text{"reste d'ordre inférieur"} \quad n \in \mathbb{N}/2.$$

Mesures de type Gibbs (Deng, Tzvetkov, Visciglia)

$$\mu_n(du) = \text{"e^{-reste} e^{-\|u\|_n^2} du"}, \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}-}) = 1, \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Et pour l'espace C^∞ ?

2 Equation de Klein-Gordon/Ondes en dimension 3

$$\partial_t^2 u - \Delta u + m_0^2 u + |u|^{p-1} u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^3 \text{ ou } D. \quad (KG - p)$$

Une loi coercive:

$$E(u, \partial_t u) = \int \frac{1}{2} \left(|\nabla u|^2 + m_0^2 u^2 + \frac{2}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx, \quad \text{Critique quand } p=5.$$

Dans le cas radial, la mesure de Gibbs

$$e^{-\frac{1}{p} \int |u|^p} e^{-\frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 + m_0^2 u^2)}, \quad \text{pour } p < 5,$$

est invariante, elle est concentrée sur $H^{1-}/2 \times H^{-1-}/2$ (Burq-Tzvetkov, de Suzzoni, Bourgain-Bulut, Xu).

Et les solutions non radiales?

1 Equation de Benjamin-Ono

$$\partial_t u + H\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{T},$$

" $\hat{H}(n) = -i \operatorname{sign}(n)$ ". GWP dans H^s , $s \geq 0$ (voir e.g. Molinet).

Infinité de lois de conservation:

$$E_n(u) = \|u\|_n^2 + \text{"reste d'ordre inférieur"} \quad n \in \mathbb{N}/2.$$

Mesures de type Gibbs (Deng, Tzvetkov, Visciglia)

$$\mu_n(du) = "e^{-\text{reste}} e^{-\|u\|_n^2} du", \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}-}) = 1, \quad \mu_n(H^{n-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Et pour l'espace C^∞ ?

2 Equation de Klein-Gordon/Ondes en dimension 3

$$\partial_t^2 u - \Delta u + m_0^2 u + |u|^{p-1} u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^3 \text{ ou } D. \quad (KG - p)$$

Une loi coercive:

$$E(u, \partial_t u) = \int \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + m_0^2 u^2 + \frac{2}{p+1} |u|^{p+1}) dx, \quad \text{Critique quand } p=5.$$

Dans le cas radial, la mesure de Gibbs

$$e^{-\frac{1}{p} \int |u|^p} e^{-\frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 + m_0^2 u^2)}, \quad \text{pour } p < 5,$$

est invariante, elle est concentrée sur $H^{1-}/2 \times H^{-1-}/2$ (Burq-Tzvetkov, de Suzzoni, Bourgain-Bulut, Xu).

Et les solutions non radiales? Et l'équation à énergie surcritique?

Théorème (S., à paraître dans APDE)

Il existe une mesure non triviale μ concentrée sur $C^\infty(\mathbb{T})$ et invariante sous le flot de l'équation de Benjamin-Ono.

Théorème (S., à paraître dans APDE)

Il existe une mesure non triviale μ concentrée sur $C^\infty(\mathbb{T})$ et invariante sous le flot de l'équation de Benjamin-Ono.

Théorème (S., Soumis)

L'équation (KG – 3) posée sur $\mathbb{T}^3$ ou sur un domaine borné D admet une mesure invariante non triviale concentrée sur $H^2 \times H^1$.

Théorème (S., à paraître dans APDE)

Il existe une mesure non triviale μ concentrée sur $C^\infty(\mathbb{T})$ et invariante sous le flot de l'équation de Benjamin-Ono.

Théorème (S., Soumis)

L'équation (KG – 3) posée sur $\mathbb{T}^3$ ou sur un domaine borné D admet une mesure invariante non triviale concentrée sur $H^2 \times H^1$.

Théorème (S., en cours)

Il existe une mesure μ non triviale concentrée sur $H^2(\mathbb{T}^3) \times H^1(\mathbb{T}^3)$ sur le support de laquelle l'équation (KG – 7) est globalement bien posée.

Principe de base = Théorème de Liouville: Toute EDO conservative préserve la mesure de Lebesgue sur son espace des phases.

$\dot{x} = u(x)$ où $\nabla \cdot u = 0$, on a $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0$. Ainsi $\partial_t \rho^* = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\rho^* u) = 0$.

Cas hamiltonien: $u = (\nabla_y H(x, y), -\nabla_x H(x, y))$, on peut choisir $\rho^*(x, y) = f(H(x, y))$.

Mesure de Gibbs: $f(r) = e^{-r}$, i.e. $\rho^* = e^{-H}$.

Principe de base = Théorème de Liouville: Toute EDO conservative préserve la mesure de Lebesgue sur son espace des phases.

$\dot{x} = u(x)$ où $\nabla \cdot u = 0$, on a $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0$. Ainsi $\partial_t \rho^* = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\rho^* u) = 0$.

Cas hamiltonien: $u = (\nabla_y H(x, y), -\nabla_x H(x, y))$, on peut choisir $\rho^*(x, y) = f(H(x, y))$.

Mesure de Gibbs: $f(r) = e^{-r}$, i.e. $\rho^* = e^{-H}$.

Problème: On n'est pas en dimension finie.

Principe de base = Théorème de Liouville: Toute EDO conservative préserve la mesure de Lebesgue sur son espace des phases.

$\dot{x} = u(x)$ où $\nabla \cdot u = 0$, on a $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0$. Ainsi $\partial_t \rho^* = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\rho^* u) = 0$.

Cas hamiltonien: $u = (\nabla_y H(x, y), -\nabla_x H(x, y))$, on peut choisir $\rho^*(x, y) = f(H(x, y))$.

Mesure de Gibbs: $f(r) = e^{-r}$, i.e. $\rho^* = e^{-H}$.

Problème: On n'est pas en dimension finie.

On considère donc des projections fini-dimensionnelles croissantes de l'EDP: $P_N(EDP)$.

On traite la convergence de la suite de mesures de Gibbs ρ_N^* associées.

Idée générale de la construction des mesures de Fluctuation-Dissipation

Principe de base = Théorème d'existence de Bogoliubov-Krylov: Toute dynamique continue à espace des phases compact admet une mesure invariante.

Idée générale de la construction des mesures de Fluctuation-Dissipation

Principe de base = Théorème d'existence de Bogoliubov-Krylov: Toute dynamique continue à espace des phases compact admet une mesure invariante.

Problème: On n'est pas à espace des phases compact.

Idée générale de la construction des mesures de Fluctuation-Dissipation

Principe de base = Théorème d'existence de Bogoliubov-Krylov: Toute dynamique continue à espace des phases compact admet une mesure invariante.

Problème: On n'est pas à espace des phases compact.

$$EDP = \alpha \text{Dissipation} + \sqrt{\alpha} \eta$$

η est un bruit blanc. Le calcul d'Itô combiné avec des lois de conservation (en principe DEUX, voir Kuksin-Shirikyan) fournit des estimées. Puis Chebyshev + Prokhorov + Bogoliubov-Krylov donnent l'existence d'une suite de mesures μ_α .

Idée générale de la construction des mesures de Fluctuation-Dissipation

Principe de base = Théorème d'existence de Bogoliubov-Krylov: Toute dynamique continue à espace des phases compact admet une mesure invariante.

Problème: On n'est pas à espace des phases compact.

$$EDP = \alpha \text{Dissipation} + \sqrt{\alpha} \eta$$

η est un bruit blanc. Le calcul d'Itô combiné avec des lois de conservation (en principe DEUX, voir Kuksin-Shirikyan) fournit des estimées. Puis Chebyshev + Prokhorov + Bogoliubov-Krylov donnent l'existence d'une suite de mesures μ_α .

Passages clé:

- Régularisation uniforme en α pour BO: Si le processus solution u est stationnaire alors: $(\mathbb{E} \|u\|_{L_x^2}^p < +\infty, \forall p) \implies (\mathbb{E} \|u\|_{H_x^n}^2 < +\infty, \forall n)$. Cette implication préserve une uniformité en α .

Idée générale de la construction des mesures de Fluctuation-Dissipation

Principe de base = Théorème d'existence de Bogoliubov-Krylov: Toute dynamique continue à espace des phases compact admet une mesure invariante.

Problème: On n'est pas à espace des phases compact.

$$EDP = \alpha \text{Dissipation} + \sqrt{\alpha} \eta$$

η est un bruit blanc. Le calcul d'Itô combiné avec des lois de conservation (en principe DEUX, voir Kuksin-Shirikyan) fournit des estimées. Puis Chebyshev + Prokhorov + Bogoliubov-Krylov donnent l'existence d'une suite de mesures μ_α .

Passages clé:

- Régularisation uniforme en α pour BO: Si le processus solution u est stationnaire alors: $(\mathbb{E} \|u\|_{L_x^2}^p < +\infty, \forall p) \implies (\mathbb{E} \|u\|_{H_x^n}^2 < +\infty, \forall n)$. Cette implication préserve une uniformité en α .
- Deux lois de presque conservation dérivées de l'énergie pour KG-3:

$$E_1(u, \partial_t u) = E(u, \partial_t u) + \frac{\alpha(m_0^2 + \lambda_0)}{2} \int u \partial_t u + \frac{\alpha^2(m_0^2 + \lambda_0)}{4} \|u\|_{H^1}^2$$

$$E_2(u, \partial_t u) = E(u, \partial_t u) - \frac{\alpha}{2} \int \partial_t u (\Delta - m_0^2) u + \frac{\alpha^2}{4} \|u\|_{H^2}^2.$$