

Journées Jeunes EDPistes 2018, Nancy

Construction de solutions quasi-périodiques linéairement instables pour un système de Schrödinger sur le tore

Victor Vilaça Da Rocha

Alameda de Mazarredo 14
48009 Bilbao, Bizkaia
(Basque Country, Spain)
vvilaca@bcamath.org

23 Mars 2018



Plan

Introduction



Victor Vilaça Da Rocha

Tores KAM linéairement instables
JEF 2018, Nancy

www.bcamath.org
basque center for applied mathematics

1/22



Plan

Introduction

Résultat



Plan

Introduction

Résultat

Méthode



Plan

Introduction

Résultat

Méthode

Conclusions et perspectives



Plan

Introduction

Résultat

Méthode

Conclusions et perspectives



Plan

Introduction

Le système étudié

Les effets de battement

Résultat

Méthode

Conclusions et perspectives



Le système

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v. \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad (\text{CNLS})$$

Le système

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v. \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad (\text{CNLS})$$

Le système

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v. \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad (\text{CNLS})$$

Propriétés :

- Hamiltonien.

Le système

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v. \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad (\text{CNLS})$$

Propriétés :

- Hamiltonien :

$$H(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (u_j \bar{u}_j + v_j \bar{v}_j) + \sum_{i+j=k+l} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j = P_2 + P_4.$$

Le système

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v. \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad (\text{CNLS})$$

Propriétés :

- Hamiltonien :

$$H(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (u_j \bar{u}_j + v_j \bar{v}_j) + \sum_{i+j=k+l} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j = P_2 + P_4.$$

- Intégrabilité ?

Le système

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v. \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad (\text{CNLS})$$

Propriétés :

- Hamiltonien :

$$H(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (u_j \bar{u}_j + v_j \bar{v}_j) + \sum_{i+j=k+l} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j = P_2 + P_4.$$

- Intégrabilité ?
- Échanges d'énergie.

Plan

Introduction

Le système étudié

Les effets de battement

Résultat

Méthode

Conclusions et perspectives



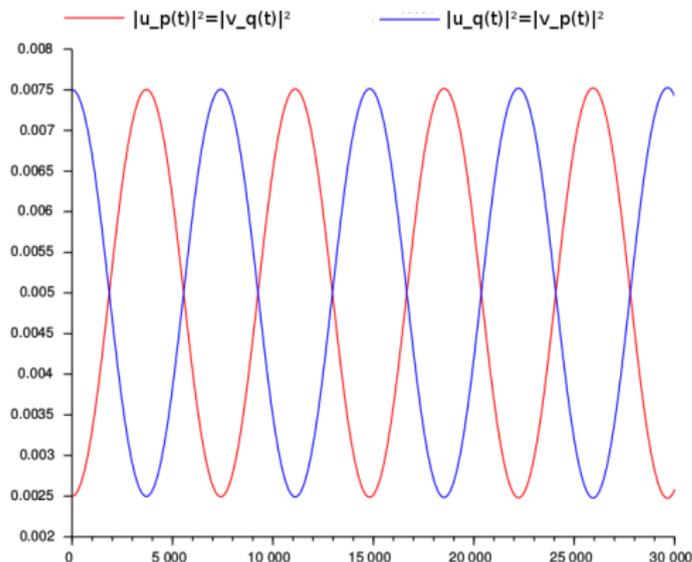
Les effets de battement

Théorème (Grébert, Paturel, Thomann, 2013)

Pour des conditions initiales suffisamment petites, on peut construire des solutions du système (CNLS) qui échangent de l'énergie en temps long.

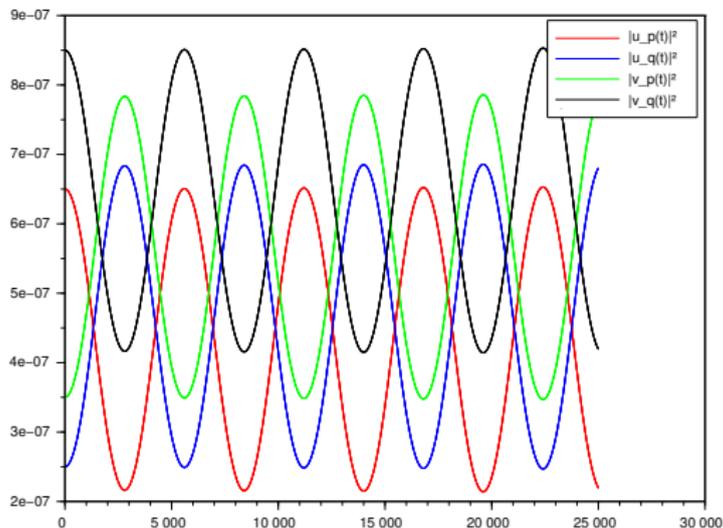
Les effets de battement

FIGURE – Les effets de battement



Les effets de battement décalés

FIGURE – Les effets de battement décalés



Plan

Introduction

Résultat

Méthode

Conclusions et perspectives



L'idée

Ici, on s'intéresse à la persistance de tores linéaires simples :



L'idée

Ici, on s'intéresse à la persistance de tores linéaires simples :

Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, $\nu > 0$ et $\rho \in (1, 2)^2$,

$$\begin{cases} u(x, t) = \sqrt{\nu\rho_1} e^{ipx} e^{-ip^2 t}, \\ v(x, t) = \sqrt{\nu\rho_2} e^{iqx} e^{-iq^2 t}, \end{cases} \quad (\text{sol lin})$$

est une solution du système **linéaire** associé à P_2 .

L'idée

Ici, on s'intéresse à la persistance de tores linéaires simples :

Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, $\nu > 0$ et $\rho \in (1, 2)^2$,

$$\begin{cases} u(x, t) = \sqrt{\nu\rho_1} e^{ipx} e^{-ip^2 t}, \\ v(x, t) = \sqrt{\nu\rho_2} e^{iqx} e^{-iq^2 t}, \end{cases} \quad (\text{sol lin})$$

est une solution du système **linéaire** associé à P_2 .

Cette solution décrit le **tore linéaire**

$$\mathcal{T}_{\nu\rho}(p, q) = \{|u_p|^2 = \nu\rho_1, |v_q|^2 = \nu\rho_2\}.$$

L'idée

Ici, on s'intéresse à la persistance de tores linéaires simples :
Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, $\nu > 0$ et $\rho \in (1, 2)^2$,

$$\begin{cases} u(x, t) = \sqrt{\nu\rho_1} e^{ipx} e^{-ip^2 t}, \\ v(x, t) = \sqrt{\nu\rho_2} e^{iqx} e^{-iq^2 t}, \end{cases} \quad (\text{sol lin})$$

est une solution du système **linéaire** associé à P_2 .
Cette solution décrit le **tore linéaire**

$$\mathcal{T}_{\nu\rho}(p, q) = \{|u_p|^2 = \nu\rho_1, |v_q|^2 = \nu\rho_2\}.$$

Question : Ces tores sont-ils persistants pour le système non linéaire ?

Le théorème

Théorème (Grébert, Vilaça Da Rocha, 2017)

Fixons $p \neq q$ et $s > 1/2$.



Le théorème

Théorème (Grébert, Vilaça Da Rocha, 2017)

Fixons $p \neq q$ et $s > 1/2$. Pour ν suffisamment petit et $\rho \in \mathcal{C}_\nu \subset [1, 2]^2$,

Le théorème

Théorème (Grébert, Vilaça Da Rocha, 2017)

Fixons $p \neq q$ et $s > 1/2$. Pour ν suffisamment petit et $\rho \in \mathcal{C}_\nu \subset [1, 2]^2$, il existe une **solution quasi-périodique** $(u, v) \in \ell_s^2 \times \ell_s^2$ de (CNLS) de la forme

$$u(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(t\omega) e^{ijx}, \quad v(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j(t\omega) e^{ijx},$$

Le théorème

Théorème (Grébert, Vilaça Da Rocha, 2017)

Fixons $p \neq q$ et $s > 1/2$. Pour ν suffisamment petit et $\rho \in \mathcal{C}_\nu \subset [1, 2]^2$, il existe une **solution quasi-périodique** $(u, v) \in \ell_s^2 \times \ell_s^2$ de (CNLS) de la forme

$$u(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(t\omega) e^{ijx}, \quad v(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j(t\omega) e^{ijx},$$

proche de la solution linéaire (sol lin), où $\omega \equiv \omega(\rho) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur fréquence non résonant proche de (p^2, q^2) .

Le théorème

Théorème (Grébert, Vilaça Da Rocha, 2017)

Fixons $p \neq q$ et $s > 1/2$. Pour ν suffisamment petit et $\rho \in \mathcal{C}_\nu \subset [1, 2]^2$, il existe une **solution quasi-périodique** $(u, v) \in \ell_s^2 \times \ell_s^2$ de (CNLS) de la forme

$$u(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(t\omega) e^{ijx}, \quad v(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j(t\omega) e^{ijx},$$

proche de la solution linéaire (sol lin), où $\omega \equiv \omega(\rho) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur fréquence non résonant proche de (p^2, q^2) .

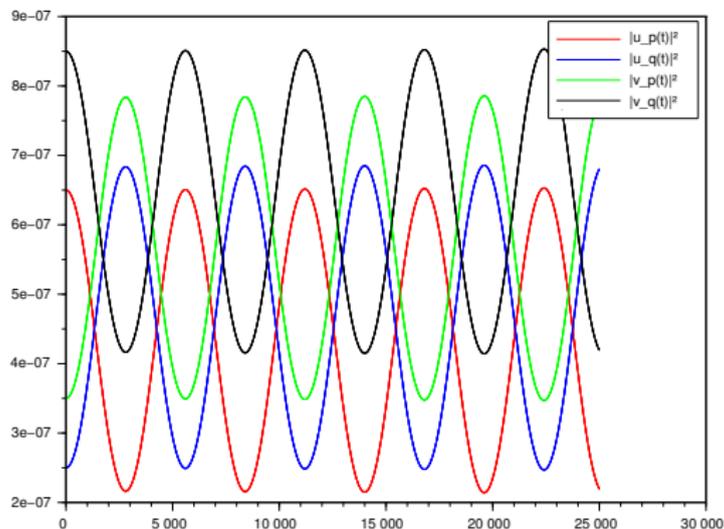
De plus, cette solution est **linéairement instable**.

Commentaires

- Liens avec les effets de battement.



FIGURE – Les effets de battement décalés



Commentaires

- Lien avec les effets de battement.
- Comportement vraiment non linéaire.



Plan

Introduction

Résultat

Méthode

Conclusions et perspectives



Plan

Introduction

Résultat

Méthode

Forme normale de Birkhoff

Théorème KAM

Conclusions et perspectives



Forme normale de Birkhoff

Proposition : Forme normale de Birkhoff

Pour ε suffisamment petit, il existe un changement de variables **symplectique** τ de la boule $B_s(\varepsilon)$ dans $B_s(2\varepsilon)$ tel que :

$$H^B := H \circ \tau = P_2 + Z_4 + R_6,$$

Forme normale de Birkhoff

Proposition : Forme normale de Birkhoff

Pour ε suffisamment petit, il existe un changement de variables **symplectique** τ de la boule $B_s(\varepsilon)$ dans $B_s(2\varepsilon)$ tel que :

$$H^B := H \circ \tau = P_2 + Z_4 + R_6,$$

où :

- ▶ Z_4 est le polynôme homogène d'ordre 4 :

$$Z_4(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = \sum_{\substack{k+l=i+j \\ k^2+l^2=i^2+j^2}} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j.$$

Forme normale de Birkhoff

Proposition : Forme normale de Birkhoff

Pour ε suffisamment petit, il existe un changement de variables **symplectique** τ de la boule $B_s(\varepsilon)$ dans $B_s(2\varepsilon)$ tel que :

$$H^B := H \circ \tau = P_2 + Z_4 + R_6,$$

où :

- ▶ Z_4 est le polynôme homogène d'ordre 4 :

$$Z_4(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = \sum_{\substack{k+l=i+j \\ k^2+l^2=i^2+j^2}} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j = \sum_{\{k,l\}=\{i,j\}} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j.$$

Forme normale de Birkhoff

Proposition : Forme normale de Birkhoff

Pour ε suffisamment petit, il existe un changement de variables **symplectique** τ de la boule $B_s(\varepsilon)$ dans $B_s(2\varepsilon)$ tel que :

$$H^B := H \circ \tau = P_2 + Z_4 + R_6,$$

où :

$$\blacktriangleright Z_4(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = \sum_{\{k,l\}=\{i,j\}} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j.$$

Terme important : $u_p v_q \bar{u}_q \bar{v}_p + \bar{u}_p \bar{v}_q u_q v_p.$

Forme normale de Birkhoff

Proposition : Forme normale de Birkhoff

Pour ε suffisamment petit, il existe un changement de variables **symplectique** τ de la boule $B_s(\varepsilon)$ dans $B_s(2\varepsilon)$ tel que :

$$H^B := H \circ \tau = P_2 + Z_4 + R_6,$$

où :

- ▶ $Z_4(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = \sum_{\{k,l\}=\{i,j\}} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j.$
- ▶ R_6 est une fonction régulière d'ordre 6.

Forme normale de Birkhoff

Proposition : Forme normale de Birkhoff

Pour ε suffisamment petit, il existe un changement de variables **symplectique** τ de la boule $B_s(\varepsilon)$ dans $B_s(2\varepsilon)$ tel que :

$$H^B := H \circ \tau = P_2 + Z_4 + R_6,$$

où :

- ▶ $Z_4(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = \sum_{\{k,l\}=\{i,j\}} u_k v_l \bar{u}_i \bar{v}_j.$
- ▶ R_6 est une fonction régulière d'ordre 6.
- ▶ τ est proche de l'identité.

Plan

Introduction

Résultat

Méthode

Forme normale de Birkhoff

Théorème KAM

Conclusions et perspectives



Préliminaires

Considérons des hamiltoniens de la forme $H(r, \theta, \zeta; \rho) = h_0 + f$, où

- ▶ ρ est un paramètre dans un compact de \mathbb{R}^n ;

Préliminaires

Considérons des hamiltoniens de la forme $H(r, \theta, \zeta; \rho) = h_0 + f$, où

- ▶ ρ est un paramètre dans un compact de \mathbb{R}^n ;
- ▶ $(r, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ sont les modes internes ;

Préliminaires

Considérons des hamiltoniens de la forme $H(r, \theta, \zeta; \rho) = h_0 + f$, où

- ▶ ρ est un paramètre dans un compact de \mathbb{R}^n ;
- ▶ $(r, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ sont les modes internes ;
- ▶ $\zeta = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sont les modes externes ;

Préliminaires

Considérons des hamiltoniens de la forme $H(r, \theta, \zeta; \rho) = h_0 + f$, où

- ▶ ρ est un paramètre dans un compact de \mathbb{R}^n ;
- ▶ $(r, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ sont les modes internes;
- ▶ $\zeta = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{Z}}$ sont les modes externes;
- ▶ $h_0 = h_0(r, \zeta; \rho) = \Omega(\rho) \cdot r + \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}} \Lambda_\alpha(\rho) |\zeta_\alpha|^2$;

Préliminaires

Considérons des hamiltoniens de la forme $H(r, \theta, \zeta; \rho) = h_0 + f$, où

- ▶ ρ est un paramètre dans un compact de \mathbb{R}^n ;
- ▶ $(r, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ sont les modes internes;
- ▶ $\zeta = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{Z}}$ sont les modes externes;
- ▶ $h_0 = h_0(r, \zeta; \rho) = \Omega(\rho) \cdot r + \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}} \Lambda_\alpha(\rho) |\zeta_\alpha|^2$;
- ▶ On distingue les modes elliptiques ($\alpha \in \mathcal{L}$, c'est à dire ici $\Lambda_\alpha \in \mathbb{R}$) et les modes hyperboliques ($\alpha \in \mathcal{F}$, c'est à dire ici $\Im \Lambda_\alpha \neq 0$);

Préliminaires

Considérons des hamiltoniens de la forme $H(r, \theta, \zeta; \rho) = h_0 + f$, où

- ▶ ρ est un paramètre dans un compact de \mathbb{R}^n ;
- ▶ $(r, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ sont les modes internes;
- ▶ $\zeta = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{Z}}$ sont les modes externes;
- ▶ $h_0 = h_0(r, \zeta; \rho) = \Omega(\rho) \cdot r + \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}} \Lambda_\alpha(\rho) |\zeta_\alpha|^2$;
- ▶ On distingue les modes elliptiques ($\alpha \in \mathcal{L}$, c'est à dire ici $\Lambda_\alpha \in \mathbb{R}$) et les modes hyperboliques ($\alpha \in \mathcal{F}$, c'est à dire ici $\Im \Lambda_\alpha \neq 0$);
- ▶ \mathcal{L} et \mathcal{F} sont des espaces respectivement de dimension infinie et finie, et \mathcal{Z} est l'union disjointe $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$;

Préliminaires

Considérons des hamiltoniens de la forme $H(r, \theta, \zeta; \rho) = h_0 + f$, où

- ▶ ρ est un paramètre dans un compact de \mathbb{R}^n ;
- ▶ $(r, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ sont les modes internes;
- ▶ $\zeta = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{Z}}$ sont les modes externes;
- ▶ $h_0 = h_0(r, \zeta; \rho) = \Omega(\rho) \cdot r + \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}} \Lambda_\alpha(\rho) |\zeta_\alpha|^2$;
- ▶ On distingue les modes elliptiques ($\alpha \in \mathcal{L}$, c'est à dire ici $\Lambda_\alpha \in \mathbb{R}$) et les modes hyperboliques ($\alpha \in \mathcal{F}$, c'est à dire ici $\Im \Lambda_\alpha \neq 0$);
- ▶ \mathcal{L} et \mathcal{F} sont des espaces respectivement de dimension infinie et finie, et \mathcal{Z} est l'union disjointe $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$;
- ▶ $f = f(r, \theta, \zeta; \rho)$ est une perturbation petite.

Théorème KAM

Théorème

Soit $s > 1/2$.

Théorème KAM

Théorème

Soit $s > 1/2$. Supposons LHQVB sur la perturbation f et les fréquences Ω et Λ_α .



Théorème KAM

Théorème

Soit $s > 1/2$. Supposons LHQVB sur la perturbation f et les fréquences Ω et Λ_α . Il existe $\mathcal{D} \subset [1, 2]^n$ un espace de Cantor tel que pour tout $\rho \in \mathcal{D}$,

Théorème KAM

Théorème

Soit $s > 1/2$. Supposons LHQVB sur la perturbation f et les fréquences Ω et Λ_α . Il existe $\mathcal{D} \subset [1, 2]^n$ un espace de Cantor tel que pour tout $\rho \in \mathcal{D}$, il existe un changement de variables symplectique Φ tel que :

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

Théorème KAM

Théorème

Soit $s > 1/2$. Supposons LHQVB sur la perturbation f et les fréquences Ω et Λ_α . Il existe $\mathcal{D} \subset [1, 2]^n$ un espace de Cantor tel que pour tout $\rho \in \mathcal{D}$, il existe un changement de variables symplectique Φ tel que :

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho) \bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$
en forme normale,

Théorème KAM

Théorème

Soit $s > 1/2$. Supposons LHQVB sur la perturbation f et les fréquences Ω et Λ_α . Il existe $\mathcal{D} \subset [1, 2]^n$ un espace de Cantor tel que pour tout $\rho \in \mathcal{D}$, il existe un changement de variables symplectique Φ tel que :

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho) \bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$
en forme normale et g encore plus petite que f (g plate).

Théorème KAM

Théorème

Soit $s > 1/2$. Supposons LHQVB sur la perturbation f et les fréquences Ω et Λ_α . Il existe $\mathcal{D} \subset [1, 2]^n$ un espace de Cantor tel que pour tout $\rho \in \mathcal{D}$, il existe un changement de variables symplectique Φ tel que :

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho)\bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$
en forme normale et g encore plus petite que f (g plate). De plus, les nouvelles fréquences sont proches des anciennes.

Conséquences dynamiques

On a

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho)\bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$ et g plate.

Conséquences dynamiques

On a

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho)\bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$ et g plate. Ici, h est en forme normale signifie que :

Conséquences dynamiques

On a

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho) \bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$ et g plate. Ici, h est en forme normale signifie que :

- ▶ $A(\rho)$ est hermitienne.

Conséquences dynamiques

On a

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho) \bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$ et g plate. Ici, h est en forme normale signifie que :

- ▶ $A(\rho)$ est hermitienne.
- ▶ $K(\rho)$ est symétrique.

Conséquences dynamiques

On a

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho)\bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$ et g plate. Ici, h est en forme normale signifie que :

- ▶ $A(\rho)$ est hermitienne.
- ▶ $K(\rho)$ est symétrique.

Corollaire

$\Phi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\})$ est un **tore invariant** pour $h_0 + f$,

Conséquences dynamiques

On a

$$(h_0 + f) \circ \Phi = h + g,$$

avec $h = \langle \omega(\rho), r \rangle + \langle \zeta_{\mathcal{L}}, A(\rho)\bar{\zeta}_{\mathcal{L}} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, K(\rho) \begin{pmatrix} \zeta_{\mathcal{F}} \\ \bar{\zeta}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \right\rangle$ et g plate. Ici, h est en forme normale signifie que :

- ▶ $A(\rho)$ est hermitienne.
- ▶ $K(\rho)$ est symétrique.

Corollaire

$\Phi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\})$ est un **tore invariant** pour $h_0 + f$ et ce tore est **linéairement stable** si et seulement si $\mathcal{F} = \emptyset$.

Plan

Introduction

Résultat

Méthode

Conclusions et perspectives



Conclusions et perspectives

Le résultat :



Conclusions et perspectives

Le résultat :

- Instabilité linéaire due aux modes u_q et v_p .



Conclusions et perspectives

Le résultat :

- Instabilité linéaire due aux modes u_q et v_p .

Autour de ce résultat :



Conclusions et perspectives

Le résultat :

- Instabilité linéaire due aux modes u_q et v_p .

Autour de ce résultat :

- Le cas $p = q$.



Conclusions et perspectives

Le résultat :

- Instabilité linéaire due aux modes u_q et v_p .

Autour de ce résultat :

- Le cas $p = q$.
- Variétés stables et instables : phénomènes de diffusion d'Arnold.



Conclusions et perspectives

Le résultat :

- Instabilité linéaire due aux modes u_q et v_p .

Autour de ce résultat :

- Le cas $p = q$.
- Variétés stables et instables : phénomènes de diffusion d'Arnold.

Perspectives :



Conclusions et perspectives

Le résultat :

- Instabilité linéaire due aux modes u_q et v_p .

Autour de ce résultat :

- Le cas $p = q$.
- Variétés stables et instables : phénomènes de diffusion d'Arnold.

Perspectives :

- Le cas du beating.



Conclusions et perspectives

Le résultat :

- Instabilité linéaire due aux modes u_q et v_p .

Autour de ce résultat :

- Le cas $p = q$.
- Variétés stables et instables : phénomènes de diffusion d'Arnold.

Perspectives :

- Le cas du beating.
- Le cas quintique.



Merci pour votre attention